FÉLCSOPORTOK

NAGY ATTILA

2013.06.28

Tartalomjegyzék

Bevezető

Mivel szinte minden, a gyakorlatban fontos algebrai struktúra definíciójában szerepel a szóban forgó műveletre (műveletekre) vonatkozóan az asszociativitás követelménye, ezért elméleti szempontból hasznosak számunkra az olyan algebrai struktúrával kapcsolatos információk, amelyben egy művelet van értelmezve, s ez a művelet asszociatív. Az ilyen algebrai struktúrát félcsoportnak nevezzük. A félcsoportnak nem csak az algebrai struktúrák elméletében, hanem az alkalmazásokban is jut szerep. A számítógéptudományban közvetlenül is alkalmazható automataelméletben, a karakterisztikus félcsoport révén, a félcsoportelméleti eredmények felhasználást nyerhetnek. Itt utalunk a [9] könyvre és a [3], [4] elektronikus jegyzetekre.

A félcsoportok elmélete lényegében a múlt század 40-es, 50-es éveiben vette kezdetét. Magyar matematikusok is szép eredményeket értek el ezen a területen. Az irodalomjegyzékben említésre kerül tőlük példaként néhány olyan munka ([12], [14], [17], [18], [20], [27], [30], [36], [37], [39]), amelyek témája kapcsolódik e jegyzet egyes fejezeteinek témáihoz.

Más fontos algebrai struktúrákkal összehasonlítva, a félcsoport fogalma a csoport fogalmának, illetve a gyűrű fogalmának általánosítása. A csoport olyan félcsoport, amelyen a tekintetbe vett művelet invertálható, a gyűrű pedig egy olyan multiplikatív félcsoport, amely egy másik művelettel, az úgynevezett összeadással együtt bizonyos feltételeknek tesz eleget. Ez a tény a félcsoportelmélet kialakulásának kezdetén determinálta a félcsoportelméleti kutatások jellegét. Egyrészt jellemző volt, hogy a vizsgálatok középpontjában főleg olyan félcsoportok álltak, amelyek sokban hasonlítottak a csoportokhoz, például abban, hogy minden elemnek van valamilyen értelemben vett inverze (reguláris félcsoportok, inverz félcsoportok). A kezdeti kutatásokat másrészt az is jellemezte, hogy a félcsoportok vizsgálata során a gyűrűelmélet főbb eredményeit igyekeztek átfogalmazni a félcsoportokra.

Az algebrai struktúrák vizsgálatában a kongruenciák központi szerepet játszanak. Ebből a szempontból lényeges különbség van a félcsoportok és a fenti öszehasonlításban szereplő csoportok, illetve gyűrűk között. Amíg a csoportok, illetve gyűrűk esetében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a kongruenciák és a csoportok normális részcsoportjai, illetve a gyűrűk ideáljai között, addig a félcsoportok esetében sokkal kedvezőtlenebb a helyzet. Ugyan egy félcsoport bizonyos részstruktúrái, például az ideálok, vagy a reflexív unitér részfélcsoportok meghatározzák az illető félcsoport egy-egy kongruenciáját, de a félcsoportok esetében nincsenek olyan részstruktúrák, amelyek kölcsönösen egyértelmű módon determinálnák egy félcsoport kongruenciáit. Többek között ez is oka annak, hogy a csoportelméletben, illetve gyűrűelméletben eredményes konstrukciók közül nem mindegyiket lehet hatásosan alkalmazni a félcsoportok vizsgálatában. Példaként említhető a direkt szorzat. Így a félcsoportelméleti kutatások jellege is megváltozott a kezdeti jelleghez képest. Olyan speciális konstrukciók jelentek meg a kutatásokban, illetve a már meglévők közül olyanok kerültek előtérbe, amelyek eredményesen használhatók a félcsoportok vizsgálatában. Ilyenek például a félcsoportok különböző típusú köteg-felbontása, főleg a félháló-felbontás, illetve a félcsoportoknak szubdirekt irreducibilis félcsoportok szubdirekt szorzatára való felbontása. A jegyzetben több fejezetet szentelünk mind a félháló-felbontásnak, mind a szubdirekt szorzatnak, ezen belül a szubdirekt irreducibilis félcsoportoknak.

A 17 fejezetből álló jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a Matematika Alapszak keretén belül "Félcsoportelmélet" címmel tartott szabadon választható tárgyam előadásainak anyaga alapján készült. A jegyzet az [5], [6], [11], [20], [25] [38] könyvek jelöléseit, fogalmait használja, és egyes fejezeteinek eredményei is feldolgozásra kerültek. Beépítésre került a [7], [10], [16], [19], [21], [23], [28], [32], [33], [34], [39], [41] cikkekben publikált eredmények némelyike is.

Az 1. fejezetben a félcsoportelmélet legalapvetőbb fogalmaival, a 2. fejezetben a félcsoportok kongruenciáival, a 3. fejezetben a félcsoportok homomorfizmusaival, a 4. és 5. fejezetekben a félcsoportok ideáljaival, illetve ideálbővítéseivel, a 6. fejezetben a reguláris félcsoportokkal és az inverz félcsoportokkal, a 7. és 8. fejezetekben a jobb (0-)egyszerű, illetve a (0-) egyszerű félcsoportokkal, a 9. fejezetben a teljesen (0-) egyszerű félcsoportokkal, a 10. fejezetben a félcsoportok félháló-felbontásával, a 11. fejezetben a félcsoportok szubdirekt szorzatával, illetve a szubdirekt irreducibilis félcsoportokkal, a 12. fejezetben a permutálható félcsoportokkal, a 13. és 14. fejezetekben félcsoportoknak csoportokba, illetve csoportok uniójába való beágyazhatóságával, a 15. fejezetben a félcsoportalgebrákkal, a 16. fejezetben félcsoportok jobbreguláris mátrixreprezentációjával foglalkozunk. Az egyes fejezetek végén feladatok találhatók. A 17. fejezet ezek megoldásait tartalmazza.

A jegyzet lektorálását Szőke Magdolna végezte. Köszönetet mondok lelkiismeretes munkájáért. Értékes megjegyzéseivel, javaslataival nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy minden bizonyítási részlet érthető, a jegyzet könnyen olvasható legyen.

Nagy Attila

1. fejezet

A félcsoport és csoport fogalma

1.1. A művelet fogalma

1.1. Definíció *Legyen n tetszőleges pozitív egész szám, és legyenek $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges nem üres halmazok. Az $A_1, \dots, A_n$ halmazok ebben a sorrendben képezett Descartes szorzatán az*

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \ : \ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

halmazt értjük, azaz mindazon n-elemű sorozatok halmazát, amely sorozatok mindegyikében az i-dik elem az A_i halmaz valamely eleme.

1.2. Definíció *Legyen A tetszőleges nem üres halmaz, és legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Az n-szeres $A \times \cdots \times A$ Descartes szorzatnak az A halmazba való egyértelmű leképezését az A halmazon értelmezett n-változós műveletnek nevezzük.*

1.3. Definíció *Egy olyan (nem üres) A halmazt, amelyen értelmezve van legalább egy művelet, algebrai struktúrának nevezünk. Ennek jelölése: $(A; \Omega)$, ahol Ω jelöli az A halmazon értelmezett műveletek halmazát. Az A halmazt az algebrai struktúra alaphalmazának is szokták nevezni.*

Ebben a jegyzetben műveleten mindig kétváltozós műveletet fogunk érteni. Ha $*$ jelöl egy A halmazon értelmezett (kétváltozós) műveletet, akkor az $(a, b) \in A \times A$ elempár $*$ szerinti képét $*(a, b)$ helyett $a * b$ módon jelöljük. Az $a * a$ elemet jelölhetjük $2a$-val, de jelölhetjük a^2-tel is, annak mintájára, hogy a számoknál $a + a$ helyett $2a$-t, illetve $a \cdot a$ helyett a^2-t írunk. Az első esetben azt mondjuk, hogy additív írásmódot, a második esetben multiplikatív írásmódot használunk. Additív írásmód esetén a művelet jeleként a $+$ jelet, multiplikatív írásmód esetén a művelet jeleként a $\cdot$ jelet használjuk. Multiplikatív irásmód esetén (ha nem okoz félreértést) a művelet jelét elhagyjuk, s az $a \cdot b$ kifejezés helyett egyszerűen ab-t írunk. Ebben a jegyzetben főleg multiplikatív írásmódot használunk.

1.4. Megjegyzés *Ha nem okoz félreértést, vagy ha nincs szükség rá, akkor egy algebrai stuktúrát csak az alaphalmazával jelöljük. Ezek szerint, A jelölhet egy halmazt és egy algebrai stuktúrát is.*

1.5. Megjegyzés *Egy műveletet táblázatos formában is megadhatunk. Például, egy* $A = \{a, b\}$ *alaphalmaz esetén a következő táblázatban*

	a	b
a	b	b
b	b	a

az a-sor b-oszlopának eleme az ab műveleti eredmény; jelen példánkban ez egyenlő b-vel. Egy, a fentieknek megfelelően konstruált táblázatot Cayley-féle művelettáblának nevezünk.

1.6. Definíció *Azt mondjuk, hogy egy A halmazon értelmezett műveletet asszociatív, ha tetszőleges* $a, b, c \in A$ *elemek esetén fennáll az*

$$a(bc) = (ab)c$$

egyenlőség. A műveletről azt mondjuk, hogy kommutatív, ha tetszőleges $a, b \in A$ *elemekre teljesül az*

$$ab = ba$$

egyenlőség. Azt mondjuk, hogy a művelet invertálható (az A halmazon), ha tetszőleges $(a, b) \in A \times A$ *elempárhoz megadhatók A-nak olyan x és y elemei, amelyekre teljesülnek az*

$$ax = b \quad \text{és} \quad ya = b$$

egyenlőségek.

1.7. Megjegyzés *Ha egy legalább kételemű A halmazon azt a műveletet tekintjük, amelynél tetszőleges* $(a, b) \in A \times A$ *elempár esetén* $ab = b$ *teljesül, akkor világos, hogy a művelet nem kommutatív. Az is világos, hogy a szóban forgó művelet nem invertálható, mert ugyan tetszőleges* $(a, b) \in A \times A$ *elempár esetén az* $ax = b$ *egyenlőség az A halmaz* $x = b$ *elemére teljesül, de* $a \neq b$ *esetén A-nak nincs olyan y eleme, amelyre* $ya = b$ *teljesülne.*

1.8. Megjegyzés *Az egész számok halmazán az összeadás asszociatív, kommutatív és invertálható. A szorzás is associatív és kommutatív, viszont nem invertálható. A racionális számok* $\mathbb{Q}$ *halmazán a szorzás asszociatív és kommutatív, valamint a* $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *halmazon invertálható.*

1.2. A félcsoport fogalma

1.9. Definíció *Egy egyműveletes algebrai struktúrát gruppoidnak nevezünk.*

1.10. Definíció *Egy S gruppoidról azt mondjuk, hogy félcsoport, ha az S-en értelmezett művelet asszociatív. Ha a művelet még kommutatív is, akkor az S félcsoportot kommutatív félcsoportnak nevezzük.*

Mindenekelőtt ismertetünk két módszert, amelyek alkalmasak annak eldöntésére, hogy egy véges S gruppoid félcsoport-e vagy nem.

1. módszer:

Legyen $(S;\cdot)$ véges gruppoid. Az S egy rögzített a eleme esetén definiáljuk az S elemei között a következő műveleteket: $x \circ y = (x \cdot a) \cdot y$, illetve $x \diamond y = x \cdot (a \cdot y)$. Világos, hogy az S összes x, y elemére az $(x \cdot a) \cdot y = x \cdot (a \cdot y)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a $\circ$ és $\diamond$ műveletek megegyeznek. Az $x \circ y$ műveleti eredményeket beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az S-en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak x-sorát ($x \in S$) kicseréljük az xa-sorára. Hasonlóan, az $x \diamond y$ műveleti eredményeket ugyancsak beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az S-en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak y-oszlopát ($y \in S$) kicseréljük az ay-oszlopára. Tehát $(S;\cdot)$ akkor és csak akkor félcsoport, ha tetszőleges S-beli a elemhez az előzőekben felírt két táblázatban az azonos helyen álló elemek egymással rendre megegyeznek. Az asszociativitás teljesülésének most részletezett tesztelését *Light-féle asszociativitási tesztnek* nevezzük.

Tekintsük példaként a következő Cayley-féle művelettáblával definiált $S = \{a, b\}$ gruppoidot:

$\cdot$	a	b
a	b	a
b	b	b

Az a elem által definiált $\circ$ művelethez tartozó táblázat:

$\circ$	a	b
b	b	b
b	b	b

Az a elem által definiált $\diamond$ művelethez tartozó táblázat:

$\diamond$	b	a
a	b	a
b	b	b .

Mivel ebben a két táblázatban már van eltérés, ezért a b elemhez tartozó táblázatokat már nem is kell összehasonlítanunk; az eredeti Cayley-táblázattal definiált $\cdot$ művelet nem asszociatív.

2. módszer:

Legyen S véges, n elemű gruppoid. Rögzítsük S elemeinek egy sorrendjét. Legyen ez például $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test. Jelölje 0, illetve 1 az $\mathbb{F}$ nullelemét, illetve egységelemét. Tetszőleges $s \in S$ elemhez definiáljunk egy $\mathbb{F}$ test feletti $n \times n$-típusú $\mathbf{R}^{(s)}$ módon jelölt mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{R}^{(s)} = (r_{i,j}^{(s)}),$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(s_i, s) = s_j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az így definiált mátrixot az S gruppoid s eleméhez tartozó $\mathbb{F}$ test feletti (az S elemeinek fenti sorrendje által meghatározott) jobb oldali mátrixának nevezzük.

Az S gruppoid valamely s eleméhez tartozó jobb oldali mátrix duálisaként értelmezhetjük a bal oldali mátrixot is, azaz azt az $\mathbb{F}$ feletti $n \times n$-típusú $\mathbf{L}^{(s)} = (l_{i,j}^{(s)})$ mátrixot, melynek $l_{i,j}^{(s)}$ elemeit a következőképpen értelmezzük:

$$l_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(s, s_j) = s_i \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Például, ha S a következő Cayley-táblázattal definiált gruppoid:

	s_1	s_2
s_1	s_2	s_2
s_2	s_2	s_1,

akkor az S elemeihez az $\{s_1, s_2\}$ sorred szerint hozzárendelt jobb oldali, illetve bal oldali mátrixok a következők:

$$\mathbf{R}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{R}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{L}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.11. Tétel *Egy véges $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon értelmezett f művelet esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) Az f művelet asszociatív az S halmazon.

(2) Tetszőleges $i, j \in S$ elemek esetén $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{R}^{(f(i,j))}$.

(3) Tetszőleges $i, j \in S$ elemek esetén $\mathbf{L}^{(i)}\mathbf{L}^{(j)} = \mathbf{L}^{(f(i,j))}$.

Bizonyítás. Jelölje $\underline{e}_t$ $(1 \leq t \leq n)$ azt az n-elemű sorozatot, amelyben a t-edik elem az $\mathbb{F}$ test egységeleme, a többi eleme pedig az $\mathbb{F}$ test nulleleme.

Legyenek $i, j \in S$ tetszőleges elemek. Világos, hogy az $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{R}^{(j)}$ mátrix k-dik sora

$$\underline{e}_{f(f(k,i),j)}.$$

Mivel az $\mathbf{R}^{(f(i,j))}$ mátrix k-dik sora

$$\underline{e}_{f(k,f(i,j))},$$

ezért

$$\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{R}^{(f(i,j))}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\underline{e}_{f(f(k,i),j)} = \underline{e}_{f(k,f(i,j))},$$

azaz, ha

$$f(f(k,i),j) = f(k,f(i,j))$$

minden $k \in S$ elemre. Következésképpen az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel az $\mathbf{L}^{(i)}\mathbf{L}^{(j)}$ mátrix k-dik oszlopa

$$\underline{e}_{f(i,f(j,k))},$$

továbbá az $\mathbf{L}^{(f(i,j))}$ mátrix k-dik oszlopa

$$\underline{e}_{f(f(i,j),k)},$$

ezért

$$\mathbf{L}^{(i)}\mathbf{L}^{(j)} = \mathbf{L}^{(f(i,j))}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\underline{e}_{f(i,f(j,k))} = \underline{e}_{f(f(i,j),k)},$$

azaz, ha

$$f(i,f(j,k)) = f(f(i,j),k)$$

minden $k \in S$ elem esetén. Igy az (1) és (3) feltételek ekvivalensek. $\square$

Az előző tétel lehetőséget ad egy kétváltozós művelet asszociativitásának tesztelésére: ahhoz, hogy egy véges (S, f) gruppoid félcsoport legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek az $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(f(a,b))}$ (illetve az $\mathbf{L}^{(a)}\mathbf{L}^{(b)} = \mathbf{L}^{(f(a,b))}$) egyenlőségek tetszőleges S-beli a és b elem esetén.

1.3. Általános asszociativitás és kommutativitás

1.12. Tétel *Legyen S egy félcsoport. Akkor tetszőleges $n \geq 3$ egész szám és S elemeiből képezett tetszőleges n elemű sorozat esetén az elemek adott sorrendben képezett szorzata nem függ attól, hogy a szorzatot milyen zárójelezés mellett számítjuk ki.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. A tétel bizonyítását a szorzatban szereplő elemszámra (n-re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 3$ esetén nincs mit bizonyítani, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben az asszociativitás definíciója miatt igaz.

Legyen $n \geq 4$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk minden n-nél kisebb tényezőszámra. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ tetszőleges elemek. Megmutjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ elemek ebben a sorrendben vett, tetszőleges $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ zárójelezése szerinti szorzatára mindig igaz, hogy

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Az világos, hogy a $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ szorzatban valamely $i = 1, \ldots, n-1$ indexre az a_i és az a_{i+1} elemek $(a_i a_{i+1})$ formában szerepelnek. Ha ezt a szorzatot S egyetlen elemének tekintjük, akkor a $Z[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ szorzat az S félcsoport $n-1$ elemének szorzataként tekinthető. Az indukciós feltételt használva, a következőket kapjuk. Az $i = 1$ esetben nyílvánvalóan teljesül a

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

egyenlőség. Ha $1 < i < n-1$, akkor

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots (a_i a_{i+1})) \ldots) a_n;$$

mivel a jobb oldalon szereplő szorzat első tényezője n-nél kevesebb tényezőt tartalmaz, ezért az megegyezik az

$$((a_1 a_2) \cdots a_{n-2}) a_{n-1}$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Végül vizsgáljuk az $i = n-1$ esetet. Ekkor

$$Z[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2})(a_{n-1} a_n).$$

A jobb oldalon szereplő szorzat az S félcsoport három elemének, az

$$x = ((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2},$$

valamint az a_{n-1} és az a_n elemek

$$x(a_{n-1}a_n)$$

szorzata, ami az asszociativitás miatt megegyezik az

$$(xa_{n-1})a_n$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, \dots, a_n] = (((a_1a_2) \cdots)a_{n-1})a_n. \qquad \square$$

1.13. Megjegyzés *Egy S félcsoport tetszőleges a eleme és tetszőleges n pozitív egész szám esetén értelmezve van az a^n hatvány, amely olyan n-tényezős szorzat, melynek minden tényezője a. Így*

$$a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = aa^2 = a^2a, \dots.$$

Additív írásmód esetén értelemszerűen az na alakú n-tagú összegről beszélhetünk; ekkor

$$1a = a, \quad 2a = a + a, \quad 3a = a + 2a = 2a + a, \dots.$$

1.14. Tétel *Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. Akkor tetszőleges $n \geq 2$ egész szám és S tetszőleges n számú eleme esetén az elemek szorzata nem függ az elemek sorrendjétől.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. A bizonyítást az elemek számára (n-re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük el. $n = 2$ esetén nincs mit bizonyítíni, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben a kommutativitás definíciója miatt igaz.

Legyen $n \geq 3$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n-nél kisebb tényezőszámra. Legyenek $a_1, \dots, a_n \in S$ tetszőleges elemek. Az előző tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots)a_{n-1})a_n,$$

ahol π az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges permutációja.

Ha $n = \pi(n)$, akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_n,$$

ahol a jobb oldali szorzat első tényezője (amely egy $n - 1$ tényezős szorzat) az indukciós feltétel miatt megegyezik azzal a szorzattal, amelyben az elemek szigorúan növekvő indexszel követik egymást, s ezért

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots)a_{n-1})a_n.$$

Ha $j = \pi(n) \neq n$, akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)})\cdots)a_{\pi(n-1)})a_j = a_j(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)})\cdots)a_{\pi(n-1)}).$$

A jobb oldalon szereplő szorzatban a második tényező az indukciós feltétel miatt átírható úgy, hogy abban az első tényező indexe $j+1$ legyen (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az asszociativitás miatt az átalakított jobboldali szorzat egyenlő azzal a szorzattal, amelyben az első tényező $a_j a_{j+1}$ (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az $a_j a_{j+1}$ szorzatot S egyetlen elemének tekintve, az indukciós feltételt felhasználásával, innen már könnyen adódik az

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)})\cdots)a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2)\cdots)a_{n-1})a_n$$

egyenlőség. □

1.4. Félcsoport kitüntetett elemei

1.15. Definíció *Egy S félcsoport valamely f elemét az S bal oldali [jobb oldali] nullelemének nevezzük, ha minden S-beli a elem esetén $fa = f$ [$af = f$] teljesül. Egy S félcsoport valamely elemét az S nulleleménék nevezzük, ha az illető elem az S-nek bal oldali és jobb oldali nulleleme.*

Tetszőleges nem üres S halmaz esetén, S-en értelmezhetjük a kötetkező műveletet: tetszőleges $a, b \in S$ esetén legyen $ab = a$ [$ab = b$]. Világos, hogy ez a művelet asszociatív, azaz S erre a műveletre nézve félcsoport, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem.

1.16. Definíció *Egy olyan félcsoportot, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem, balzéró [jobbzéró] félcsoportnak fogunk nevezni.*

1.17. Lemma *Minden félcsoportnak legfeljebb egy nulleleme lehet. Ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali nulleleme, akkor mindegyikből csak egy van, amelyek egybeesenek, s a félcsoport egyetlen nullelemét adják.*

Bizonyítás. Ha e, illetve f egy félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali nullelemei, akkor $e = ef = f$. Ez bizonyítja a lemma minden állítását. □

Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^0 azt a félcsoportot, amely megegyezik S-sel, ha S-nek van nulleleme, ellenkező esetben viszont azt a félcsoportot, melyet S-ből úgy származtatunk, hogy az S halmazt kiegészítjük egy $0 \notin S$ elemmel, s az $S \cup \{0\}$ halmazon úgy értelezünk egy műveletet, hogy a művelet eredménye az S-beli elemek között legyen egyenlő az eredeti S-beli műveleti eredménnyel, viszont tetszőleges $x \in S \cup \{0\}$ elem esetén $x0$ és $0x$ is legyen egyenlő a 0 elemmel. Világos, hogy S^0 olyan félcsoport, amelynek van nulleleme. Az első esetben az eredeti, S-beli nullelem, a második esetben az S-hez adjungált elem.

Tetszőleges S nem üres halmaz tetszőleges a eleme esetén definiálhatunk S-en egy $*$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $x, y \in S$ esetén legyen $x * y = a$. Világos, hogy $(S, *)$ egy félcsoport, amelyben a nullelem. Ebben a félcsoportban bármely két elem szorzata a nullelem. Egy ilyen félcsoportot *zéró félcsoportnak* nevezünk.

1.18. Definíció *Egy S félcsoport valamely e elemét a félcsoport bal oldali egységelemének nevezzük, ha S minden s eleme esetén fennáll az $es = s$ egyenlőség. Félcsoport jobb oldali egységelemének fogalma a bal oldali egységelem fogalmának duálisa. Egy félcsoport valamely elemét a félcsoport egységelemnek nevezünk, ha az bal oldali és egyben jobb oldali egységeleme a félcsoportnak.*

1.19. Tétel *Minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van. Továbbá, ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali egységeleme is, akkor azok egyenlőek, s az S félcsoport egyetlen egységelemét adják.*

Bizonyítás. Jelölje e, illetve f egy S félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali egységelemét. Akkor

$$e = ef = f.$$

Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

1.20. Definíció *Egy egységelemes félcsoportot monoidnak is nevezünk.*

1.21. Megjegyzés *Minden S félcsoporthoz adjungálhatunk egy, az S által nem tartalmazott e elemet, és az $S \cup e$ halmazon definiálhatunk egy $\circ$ műveletet úgy, hogy legyen*

$$e \circ s = s \circ e = s$$

tetszőleges $s \in S \cup e$ esetén, s az S-beli műveletet változatlanul hagyjuk. Az világos, hogy ezzel egy olyan félcsoportot definiáltunk, amelyben e egységelem.

Jelölés: Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^1 az S félcsoportot, ha S-ben van egységelem, egyébként pedig jelölje azt a félcsoportot, amelyet S-ből egy egységelem adjungálásával nyerünk az előző megjegyzésben szereplő módon.

1.22. Definíció *Egy e egységelemes S félcsoport valamely b elemét [c elemét] egy $a \in S$ elem bal oldali [jobb oldali] inverzének nevezzük, ha $ba = e$ [$ac = e$] teljesül. Egy $a^{-1} \in S$ elemről azt mondjuk, hogy az $a \in S$ elem inverze, ha a^{-1} az a elem bal oldali és jobb oldali inverze is.*

1.23. Tétel *Egységelemes félcsoportban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Továbbá, ha egy a elemnek van jobb oldali és bal oldali inverze is, akkor azok egyenlők, és az a elem egyetlen inverzét adják.*

Bizonyítás. Jelölje a', illetve a'' egy egységelemes S félcsoport valamely a elemének bal oldali, illetve jobb oldali inverzét. Akkor, e-vel jelölve az S egységelemét,

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$$

adódik. Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

1.5. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók

1.24. Definíció *Egy S félcsoportot csoportnak nevezünk, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze. Ha emellett még kommutatív is a művelet, akkor kommutatív csoportról beszélünk.*

1.25. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

(1) S csoport;

(2) S-nek van olyan e jobb oldali egységeleme, hogy S minden elemének van S-ben e-re vonatkozó jobb oldali inverze, azaz minden $a \in S$ elemhez van olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $aa^{-1} = e$;

(3) S-nek van olyan f bal oldali egységeleme, hogy S minden elemének van S-ben f-re vonatkozó bal oldali inverze, azaz minden $a \in S$ elemhez van olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $a^{-1}a = f$;

(4) Az S-en értelmezett művelet invertálható, azaz tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $ax = b$ és $ya = b$ teljesül;

(5) Minden $a \in S$ elemre $Sa = S$ és $aS = S$.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy az (1) feltételből következik a (2) és a (3) feltétel. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $x = a^{-1}b$ és $y = ba^{-1}$ elemekre teljesülnek az $ax = b$ és $ya = b$ egyenlőségek, ezért az (1) feltételből következik a (4) feltétel is.

A következő lépésként megmutatjuk, hogy (2) maga után vonja (1)-et. Tegyük fel, hogy az S félcsoportban van olyan e jobb oldali egységelem, hogy S minden elemének van jobb oldali inverze erre a jobb oldali egységelemre nézve. Legyen a tetszőleges S-beli elem. Jelölje a_0 az a-nak, a_1 az a_0-nak egy-egy jobb oldali inverzét az e jobb oldali egységelemre nézve, azaz

$$aa_0 = e = a_0a_1.$$

Akkor

$$a_0 a = (a_0 a)e = (a_0 a)(a_0 a_1) = a_0(aa_0)a_1 = a_0 e a_1 = a_0 a_1 = e,$$

tehát a_0 bal oldali inverze a-nak e-re nézve. Így

$$ea = (aa_0)a = a(a_0 a) = ae = a,$$

tehát e kétoldali egységeleme S-nek. Igy (1) teljesül.

Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy a (3) feltételből következik az (1) feltétel.

Az eddigi eredményekből már az is következik, hogy az (1), a (2) és a (3) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel a (4) és (5) feltételek nyilvánvalóan ekvivalensek, elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (4) feltételből következik az (2) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $ax = b$ és $ya = b$ teljesül. Legyen $a \in S$ tetszőleges, rögzített elem. Akkor megadható olyan e elem, amelyre $ae = a$ teljesül. Legyen $b \in S$ tetszőleges elem. Akkor van olyan $y \in S$ elem, hogy $ya = b$. Ezért

$$be = (ya)e = y(ae) = ya = b,$$

azaz e az S félcsoport jobb oldali egységeleme. Mivel a művelet invertálható, tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $aa^{-1} = e$. Tehát (2) teljesül. $\square$

1.6. Félcsoport részfélcsoportjai

1.26. Definíció *Egy S félcsoport valamely nem üres T részhalmazát az S félcsoport részfélcsoportjának nevezzük, ha T zárt az S-beli műveletre nézve, azaz $ab \in T$ teljesül minden $a, b \in T$ elem esetén.*

1.27. Definíció *Egy S félcsoport valamely nem üres I részhalmazát bal oldali ideálnak (vagy balideálnak) nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in I$ elem esetén $sa \in I$, azaz $SI \subseteq I$; a jobb oldali ideál (vagy jobbideál) fogalma a bal oldali ideál fogalmának duálisa. Ha I jobbideálja és balideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja (vagy ideálja) S-nek.*

Az világos, hogy egy félcsoport minden balideálja (jobbideálja, ideálja) részfélcsoport. Az ideálok részletesebb vizsgálatával a 4. fejezet foglalkozik.

1.28. Definíció *Egy S félcsoport valamely nem üres G részhalmazát az S félcsoport generátorrendszerének nevezzük, ha S tetszőleges s eleméhez megadhatók G-nek olyan $g_1, \ldots, g_n$ elemei, hogy $s = g_1 g_2 \cdots g_n$. Ekkor az $S = \langle G \rangle$ jelölést használjuk. Ha S-nek van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy S végesen generálható. Ha S-nek van egyetlen elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt* *mondjuk, hogy S ciklikus félcsoport. S egy nem üres A részhalmaza esetén az A elemeiből képezhető összes $a_1 \cdots a_n$ ($n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in A$) szorzat az S egy részfélcsoportját alkotja, melyet az A által generált részfélcsoportnak nevezünk és $\langle A \rangle$-val jelölünk. Tehát $\langle A \rangle = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$. Az világos, hogy $\langle A \rangle$ megegyezik az A-t tartalmazó részfélcsoportok metszetével.*

1.29. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges a eleme esetén $\langle a \rangle$ izomorf vagy a pozitív egész számok additív félcsoportjával, vagy pedig $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$, ahol i az a legkisebb pozitív egész szám, amelyhez van olyan $i \neq j$, hogy $a^i = a^j$, m pedig az legkisebb pozitív egész szám, amelyre $a^i = a^{i+m}$ teljesül; ekkor az is igaz, hogy $K_a = \{a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$ izomorf az egészek mod m additív csoportjával, $(\mathbb{Z}_m; +)$-szal.*

Bizonyítás. Legyen a egy S félcsoport tetszőleges eleme. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $a^i = a^j$ akkor és csak akkor teljesül valamely i és j pozitív egész számra, ha $i = j$. Ekkor a

$$\varphi \ : a^i \ \mapsto \ i$$

az $< a >$ ciklikus félcsoportnak a pozitív egész számok additív félcsoportjára való izomorfizmusa.

2. eset: Megadhatók olyan $i \neq j$ pozitív egész számok, amelyekre $a^i = a^j$ teljesül. Jelölje a továbbiakban i azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^j$ teljesül valamely $j \neq i$ pozitív egészre. Jelölje továbbá m azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^{i+m}$. Ekkor persze

$$a^{i+km} = a^{i+m}a^{(k-1)m} = a^i a^{(k-1)m} = a^{i+m}a^{(k-2)m} = a^i a^{(k-2)m} = \cdots = a^i,$$

és ezért tetszőleges pozitív egész n esetén megadhatók olyan k és t nemnegatív egészek ($t = 0, \ldots, m-1$), amelyekre $n = km + t$, s ezért

$$a^{i+n} = a^{i+km+t} = a^{i+km}a^t = a^{i+t}.$$

Így

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$$

és $K_a = \{a^i, \ldots, a^{i+m-1}\}$ az S félcsoport részfélcsoportja. Jelölje j azt a $0 \leq j \leq m-1$ egész számot, melyre $i + j$ osztható m-mel. Mivel $i, i+1, \ldots i+m-1$ egymást követő m pozitív egész szám, ezért egy és csak egy ilyen j szám létezik. Tetszőleges $a^{i+t} \in K_a$ elemre

$$a^{i+j}a^{i+t} = a^{km}a^{i+t} = a^{i+km+t} = a^{i+t},$$

így a^{i+j} a K_a félcsoport egységeleme. Legyen $a^{i+t} \in K_a$ tetszőleges. Mivel $0 \leq t \leq m-1$, ezért megadható olyan $0 \leq k \leq m-1$ egész szám, hogy $i+t+i+k$ osztható m-mel. Így

$$a^{i+t}a^{i+k} = a^{i+j}.$$

Tehát a^{i+k} az a^{i+t} elem inverze, és így K_a részcsoportja az S félcsoportnak. Az elmondottakból az is következik, hogy

$$\varphi \ : \ a^{i+t} \ \mapsto \ [i+t]$$

izomorfizmusa K_a-nak $(\mathbb{Z}_m;+)$-ra, ahol $[i+t]$ jelöli $\mathbb{Z}_m$-nek azt az elemét ($\mathbb{Z}$ azon kongruencia-osztályát $(\mathrm{mod}\ m)$), amely tartalmazza az $i+t$ számot. $\square$

1.30. Definíció *Egy S félcsoport valamely a eleme által generált ciklikus részfélcsoport rendjét, az a elem rendjének nevezzük és $o(a)$- val jelöljük. Egy véges rendű elemet periódikus elemnek is szoktunk nevezni.*

1.31. Megjegyzés *Ha a egy S félcsoport véges rendű eleme, akkor az előző tételben szereplő jelöléseket használva, i-t az a elem indexének, a m-et pedig az a elem periódusának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket használva, azt kapjuk, hogy*

$$o(a)+1 = index + periódus.$$

1.32. Definíció *Egy S félcsoportot periodikus félcsoportnak nevezünk, ha minden eleme periodikus.*

1.33. Tétel *Egy periodikus S félcsoport minden elemének valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában.*

Bizonyítás. Legyen a egy periodikus S félcsoport tetszőleges eleme. Az 1.29. Tétel szerint $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$ izomorf az egészek mod m additív csoportjával. Ebből már következik a tétel állítása. $\square$

William Burnside angol matematikus 1902-ben tette fel a következő kérdést: egy végesen generálható, véges rendű elemeket tartalmazó csoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Ennek félcsoportelméleti megfelelője: egy végesen generált periodikus félcsoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Erre a kérdésre 1984-ben adott választ A. Restivo és C. Reutenauer ([32]). Tőlük származik a lentebbi 1.36. Tétel.

1.34. Definíció *Legyen $n \geq 2$ tetszőleges egész szám. Azt mondjuk, hogy egy S félcsoport rendelkezik n-re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal, ha az S félcsoport elemeinek tetszőleges n-elemű $s_1, \dots, s_n$ sorozatához magadható olyan n-edfokú nem-identikus σ permutáció, hogy $s_1 \cdots s_n = s_{\sigma(1)} \cdots s_{\sigma(n)}$.*

1.35. Definíció *Azt mondjuk, hogy egy S félcsoport rendelkezik a permutációtulajdonsággal, ha rendelkezik valamely $n \geq 2$ egész számra vonatkozóan a permutációtulajdonsággal.*

1.36. Tétel *(Burnside probléma félcsoportokra) Egy végesen generált periodikus félcsoport akkor és csak akkor véges, ha rendelkezik a permutációtulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen S véges félcsoport. Ekkor S végesen generált és periodikus. Legyen

$$n = 1 + 2|S|,$$

így $n \geq 3$. Megmutatjuk, hogy S rendelkezik n-re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal. Legyenek $s_1, \ldots, s_n \in S$ tetszőleges elemek. Tekintsük az S félcsoport következő elemsorozatát:

$$s_1, s_1s_2, s_1s_2s_3, \ldots, s_1s_2\cdots s_n.$$

Az n definíciója miatt megadhatók olyan i, j, k egészek, amelyekre $1 \leq i < j < k \leq n$ teljesül, és fennálnak a következő egyenlőségek:

$$s_1 \cdots s_i = s_1 \cdots s_j = s_1 \cdots s_k.$$

Legyen

$$u = s_1 \cdots s_i, \quad x = s_{i+1} \cdots s_j, \quad y = s_{j+1} \cdots s_k,$$

ezért

$$u = ux = uxy,$$

amiből

$$uyx = uxyx = ux = uxy$$

adódik. Így

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots s_i s_{j+1} \cdots s_k s_{i+1} \cdots s_k,$$

amiből következik, hogy S rendelkezik a permutációtulajdonsággal.

Fordítva, legyen S olyan végesen generált periodikus félcsoport, amely rendelkezik a permutációtulajdonsággal. Akkor megadható olyan $n \geq 2$ egész szám, hogy az S félcsoport rendelkezik az n-re vonatkozó permutációtulajdonsággal. Jelölje A az S félcsoport egy véges generátorrendszerét. A 3.15. Tétel szerint létezik az $\mathcal{F}_A$ szabad félcsoportnak az S félcsoportra való olyan φ homomorfizmusa, amely annak az

$$f: \; A \mapsto A \subseteq S$$

leképezésnek a kiterjesztése, amely A minden elemének önmagát felelteti meg. Az $\mathcal{F}_A$ szabad félcsoport elemeit szavaknak fogjuk nevezni, és egy $w \in \mathcal{F}_A$ szó hosszát $|w|$ fogja jelölni. Tekintsük az A halmaz egy teljes rendezését. Ennek segítségével értelmezünk az $\mathcal{F}_A$ szabad félcsoporton egy $<$ (teljes) rendezést a következőképpen. Tetszőleges $u, v \in \mathcal{F}_A$ szavak esetén $u < v$ akkor és csak akkor, ha u hossza kisebb v hosszánál, vagy a két szó hossza megegyezik, de u megelőzi v-t az A-n tekintett teljes rendezés által meghatározott lexikografikus rendezés szerint. A [33]-ben található 4.2.7 Tétel szerint minden $p \geq 2n$ egész számhoz megadható olyan $N(p)$ pozitív egész szám, hogy minden legalább $N(p)$ hosszúságú $\mathcal{F}_A$-beli w szóra a következő két feltétel valamelyike teljesül.

(1) Léteznek olyan $\mathcal{F}_A$-beli $u, v, x_1, \ldots, x_n$ elemek (szavak), hogy w előáll $w = ux_1 \cdots x_n v$ alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges n-edfokú $\sigma \neq id$ permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} v < w.$$

(2) Megadhatók olyan $\mathcal{F}_A$-beli u, v, x szavak, hogy w előáll

$$w = ux^p v$$

alakban, ahol az x szó hossza legfeljebb $n - 1$.

Mivel S periodikus és A véges, ezért megadható olyan $p \geq 2n$ egész szám, hogy minden legfeljebb n hosszúságú w szó esetén az S félcsoportban

$$\varphi(w)^p = \varphi(w)^{p'}$$

teljesül valamely $p' < p$ kitevőre. Megmutatjuk, hogy S minden s eleméhez van olyan $N(p)$-nél kisebb hosszúságú w szó, hogy $s = \varphi(w)$. Ez már bizonyítja, hogy az S félcsoport véges. Legyen tehát s tetszőleges S-beli elem. Legyen w az $\mathcal{F}_A$ szabad félcsoport $\varphi(s)^{-1}$ részhalmazának minimális eleme a fenti $<$ rendezés szerint. Megmutatjuk, hogy w hossza kisebb $N(p)$-nél. Tegyük fel ennek ellenkezőjét. Ekkor w-re teljesül a fenti (1) és (2) feltétel valamelyike.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor w-re a fenti (1) feltétel teljesül. Akkor léteznek olyan $\mathcal{F}_A$-beli $u, v, x_1, \ldots x_n$ szavak, hogy w előáll

$$w = ux_1 \cdots x_n v$$

alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges n-edfokú nem-identikus σ permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} v < w.$$

Válasszuk σ-t olyannak, amely a permutáció-tulajdonság miatt az $x_1, \ldots, x_n$ elemsorozathoz tartozik. Ekkor viszont

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}),$$

és így

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \in \varphi(s)^{-1}.$$

Az (1) feltétel miatti

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} v < w$$

eredmény viszont ellentmond annak, hogy w a $\varphi(s)^{-1}$ halmaz minimális eleme.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor w-re a (2) feltétel teljesül. Akkor megadhatók olyan $\mathcal{F}_A$-beli u, v, x szavak, hogy w előáll $w = ux^pv$ alakban és az x szó hossza legfeljebb $n-1$. Így

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux^pv) = \varphi(u)\varphi(x^p)\varphi(v) = \varphi(u)\varphi(x^{p'})\varphi(v) = \varphi(ux^{p'}v),$$

amiből

$$ux^{p'}v \in \varphi(s)^{-1}$$

következik. Mivel $p' < p$, ezért az $ux^{p'}v$ szó hossza kisebb a w szó hosszánál, ami ellentmond annak, hogy w a $\varphi(s)^{-1}$ halmaz minimális eleme.

Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, szükségképpen teljesül, hogy a w szó hossza kisebb az $N(p)$ pozitív egész számnál. A fenti megjegyzés figyelembevételével a tételt ezzel bebizonyítottuk. □

1.37. Definíció *Egy S félcsoport e elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $e^2 = e$, azaz $o(e) = 1$.*

1.38. Definíció *Ha egy S félcsoport minden eleme idempotens, akkor az S félcsoportot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló.*

1.39. Megjegyzés *Tetszőleges S félcsoport idempotens elemeinek E_S halmazán definiált $e \leq f$ $(e, f \in E_S)$ akkor és csak akkor ha $e = ef = fe$ reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz egy parciális rendezés. A továbbiakban, ha idempotens elemek közötti parciális rendezésről lesz szó, akkor mindig a most definiált $\leq$ parciális rendezésre gondolunk.*

1.7. Félcsoport részcsoportjai

1.40. Definíció *Egy S félcsoport részcsoportján értjük S olyan részfélcsoportját, amely csoport.*

Ha e egy S félcsoport idempotens eleme, akkor $\{e\}$ részcsoportja S-nek. Tehát S minden e idempotens eleméhez tartozik S-nek legalább egy részcsoportja, amelynek e az egységeleme. A következőkben egy félcsoport adott e idempotens eleméhez (az előbb említett módon) tartozó részcsoportjaival foglalkozunk.

1.41. Tétel *Egy S félcsoport tetszőleges e idempotens eleme esetén*

$$G_e = \{a \in S : \; a = ae = ea, \; aa' = a'a = e \text{ valamely } a' \in S \text{ elemre}\}$$

S-nek olyan részcsoportja, amely tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e egységelem. Minden ilyen G_e maximális részcsoportja S-nek (abban az értelemben, hogy nincs S-nek olyan részcsoportja, amely valódi módon tartalmazná G_e-t). Továbbá S bármely két különböző maximális részcsoportjának metszete üres.

Bizonyítás. Ha $a, b \in G_e$, akkor

$$e(ab) = (ab)e = ab$$

és

$$(ab)(b'a') = (b'a')(ab) = e.$$

Ezért G_e részfélcsoport. Az világos, hogy minden $a \in G_e$ esetén az $aa' = a'a = e$ feltételből $(aa')e = aa'$ és $e(a'a) = a'a$ következik, és így

$$a'aa' \in Se \cap eS.$$

Továbbá

$$(a'aa')a = (a'a)(a'a) = e^2 = e,$$

és

$$a(a'aa') = (aa')(aa') = e^2 = e.$$

Tehát

$$a'aa' \in G_e.$$

Az előzőekből világos az is, hogy $a'aa'$ az $a \in G_e$ elem G_e-beli inverze. Tehát G_e csoport. A definíció alapján világos, hogy G_e tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e az egységelem. Ha $G_e \cap G_f \neq \emptyset$ valamely $e, f \in E_S$ elemekre, akkor tetszőleges $x \in G_e \cap G_f$ elem esetén $e = xx'$ és $f = x''x$ ($x' \in G_e$, $x'' \in G_f$), s ezért

$$e = xx' = (fx)x' = f(xx') = fe = (x''x)e = x''(xe) = x''x = f,$$

amiből

$$G_e = G_f$$

következik. Ezért

$$G_e \cap G_f = \emptyset, \quad \text{ha} \quad e \neq f.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

1.42. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S részcsoportjainak uniója.*
2. *S diszjunkt részcsoportjainak uniója.*

Bizonyítás. Az 1.41. Tétel felhasználásával nyilvánvaló. □

Feladatok

1.1. Feladat *(Megoldás: 17.1.) Mutassuk meg, hogy az $S = \{a, b\}$ halmaz az*

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & b & a. \end{array}$$

Cayley-táblázattal definiált műveletre nézve nem alkot félcsoportot, de az elemeihez tartozó jobb mátrixok félcsoportot alkotnak!

1.2. Feladat *(Megoldás: 17.2.) Mutassuk meg, hogy valamely A és B halmazok $A \times B$ descartes szorzata az $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ műveletre nézve olyan félcsoportot alkot, amelynek minden eleme idempotens.*

1.3. Feladat *(Megoldás: 17.3.) Mutassuk meg, hogy egy A gruppoid esetén*

$$S = \{a \in A : \ (\forall x, y \in A) \ a(xy) = (ax)y\}$$

az A egy részfélcsoportja.

1.4. Feladat *(Megoldás: 17.4.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részfélcsoportja van.*

2. fejezet

Félcsoport kongruenciái

2.1. Binér relációk félcsoportja

2.1. Definíció *Egy $X \neq \emptyset$ halmazon értelmezett (binér) reláción az $X \times X$ halmaz egy részhalmazát értjük. Az X halmaz összes binér relációinak halmazát $\mathcal{B}_X$ jelöli. Az (x,x) $(x \in X)$ párok halmazát az X identikus relációjának nevezzük, és ι_X-szel (vagy csak ι-val) fogjuk jelölni. A teljes $X \times X$ halmazt az X halmaz univerzális relációjának nevezzük, és ω_X-szel (vagy csak ω-val) fogjuk jelölni.*

2.2. Definíció *Az X halmaz tetszőlges α és β relációi esetén azt mondjuk, hogy α része β-nak (jel.: $\alpha \subseteq \beta$), ha mint az $X \times X$ halmaz részhalmazai között fenáll a megfelelő tartalmazás, azaz az $(a,b) \in \alpha$ feltételből $(a,b) \in \beta$ következik.*

2.3. Megjegyzés *Két reláció akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha mindegyik tartalmazza a másikat.*

2.4. Definíció *Legyenek α és β egy X halmaz tetszőleges relációi. Jelölje $\alpha \circ \beta$ a következő relációt:*

$$\alpha \circ \beta = \{(a,b) \in X \times X : \text{ van olyan } c \in X \text{ elem, hogy } (a,c) \in \alpha,\ (c,b) \in \beta\}.$$

Ezt a relációt az α és β relációk kompozíciójának nevezzük.

2.5. Tétel *Tetszőleges X halmazon értelmezett összes (binér) reláció $\mathcal{B}_X$ halmaza a relációk kompozíciójára nézve félcsoportot alkot.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}_X$ tetszőlegesek. Ha

$$(a,b) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$$

valamely $a, b \in X$ elemekre, akkor van olyan $x \in X$ elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \circ \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor, alkalmas $y \in X$ elemre,

$$(a, y) \in \alpha,\ (y, x) \in \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor viszont

$$(a, y) \in \alpha \quad \text{és}(y, b) \in \beta \circ \gamma$$

miatt

$$(a, b) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Így

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás is. Ezért

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

2.6. Definíció *Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{B}_X$ reláció esetén legyen $\alpha^{-1} = \{(a, b) \in X \times X : (b, a) \in \alpha\}$.*

2.7. Lemma $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$ *tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta)^{-1}.$$

Ekkor

$$(b, a) \in \alpha \circ \beta,$$

és ezért valamely $x \in X$ elemre

$$(b, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, a) \in \beta.$$

Így

$$(a, x) \in \beta^{-1} \quad \text{és} \quad (x, b) \in \alpha^{-1},$$

tehát

$$(a, b) \in \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}.$$

Ebből

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

következik. Hasonlóan bizonyítható a fordított tartalmazás is. □

2.8. Megjegyzés *Tetszőleges* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ *esetén* $\alpha \subseteq \beta$ *maga után vonja* $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ *teljesülését.*

2.9. Definíció *Egy* X *halmazon értelmezett* α *relációról azt mondjuk, hogy reflexív, ha* $\iota \subseteq \alpha$*; szimmetrikus, ha* $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$*; tranzitív, ha* $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$*.*

2.10. Megjegyzés *Ha* α *szimmetrikus reláció, akkor* $\alpha = \alpha^{-1}$*, mert az* $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ *tartalmazásból* $\alpha^{-1} \subseteq (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ *következik. Ha* β *reflexív és tranzitív, akkor* $\beta \circ \beta = \beta$*, mert az* $(a, b) \in \beta$ *feltételből (a* β *reflexivitása miatti* $(b, b) \in \beta$ *tartalmazást is használva)* $(a, b) \in \beta \circ \beta$ *következik. Tehát a tranzitivitás miatti* $\beta \circ \beta \subseteq \beta$ *tartalmazás mellett a* $\beta \subseteq \beta \circ \beta$ *tartalmazás is teljesül. Azért* $\beta \circ \beta = \beta$*.*

2.11. Megjegyzés *Ha* ϱ_0 *egy* S *félcsoporton értelmezett reláció, akkor*

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cup \iota$$

a ϱ_0 *relációt tartalmazó legszűkebb reflexív reláció,*

$$\varrho_2 = \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota$$

a ϱ_0 *relációt tartalmazó legszűkebb reflexív és szimmetrikus reláció.*

2.12. Lemma *Ha* α *és* β *egy* X *halmazon értelmezett reflexív relációk, akkor* $\alpha \circ \beta$ *is reflexív reláció* X*-en.*

Bizonyítás. Ha $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ reflexív, akkor minden $a \in X$ elem esetén

$$(a, a) \in \alpha \quad (a, a) \in \beta,$$

és ezért

$$(a, a) \in \alpha \circ \beta.$$

Tehát

$$\iota \subseteq \alpha \circ \beta,$$

azaz $\alpha \circ \beta$ reflexiv relációja X-nek. □

2.13. Lemma *Tetszőleges* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ *szimmetrikus relációk esetén* $\alpha \circ \beta$ *akkor és csak akkor szimmetrikus, ha* $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$*.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ szimmetrikus relációk.

Először tegyük fel, hogy

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. Akkor

$$\alpha \circ \beta = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = (\beta \circ \alpha)^{-1} = (\alpha \circ \beta)^{-1}$$

miatt $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus. Akkor

$$\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = (\beta)^{-1} \circ (\alpha)^{-1} = \beta \circ \alpha.$$

2.2. Ekvivalenciarelációk

2.14. Definíció *Az X halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük.*

2.15. Megjegyzés *Egy S félcsoport ϱ relációja esetén a*

$$\varrho^t = \varrho \cup (\varrho \circ \varrho) \cup (\varrho \circ \varrho \circ \varrho) \cup \cdots$$

reláció a ϱ relációt tartalmazó legszükebb tranzitív reláció. Az S valamely w és w' elemeire tehát

$$(w, w') \in \varrho^t$$

akkor és csak akkor teljesül, ha megadható S elemeinek olyan

$$w = w_0, w_1, \ldots, w_n = w'$$

sorozata, hogy

$$(w_i, w_{i+1}) \in \varrho$$

teljesül minden $i = 0, \ldots, n-1$ indexre. Ez, illetve a 2.11. Megjegyzés alapján egy S félcsoport tetszőleges ϱ_0 relációja esetén

$$(\varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota)^t$$

a ϱ_0 relációt tartalmazó legszükebb ekvivalencia reláció.

2.16. Tétel *Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ ekvivalenciarelációk esetén $\alpha \circ \beta$ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ olyan ekvivalenciarelációk, amelyekre

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. A 2.12. Lemma és a 2.13. Lemma szerint $\alpha \circ \beta$ reflexív és szimmetrikus. Mivel

$$(\alpha \circ \beta)^2 = (\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta)$$

$$= \alpha \circ (\beta \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\alpha \circ \beta) \circ \beta$$
$$= (\alpha \circ \alpha) \circ (\beta \circ \beta) = \alpha \circ \beta,$$

ezért $\alpha \circ \beta$ tranzitív is. Így $\alpha \circ \beta$ ekvivalenciareláció.

Fordítva, ha $\alpha \circ \beta$ ekvivalencia/reláció, akkor a 2.13. Lemma szerint $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.□

2.3. Félcsoport kongruenciarelációi, faktorfélcsoport

2.17. Definíció *Egy S félcsoport valamely α relációjáról akkor mondjuk, hogy balról kompatibilis (az S-beli műveletre nézve), ha tetszőleges S-beli a, b, s elemek esetén az $(a, b) \in \alpha$ feltételekből $(sa, sb) \in \alpha$ következik. A jobbról való kompatibilitás fogalma a balról való kompatibilitás fogalmának duálisa.*

2.18. Tétel *Tetszőleges S félcsoport balról [jobbról] kompatibilis relációinak halmaza a $\mathcal{B}_S$ relációfélcsoport részfélcsoportja.*

Bizonyítás. Legyenek α és β egy S félcsoport tetszőleges balról kompatibilis relációi. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül az S valamely a és b elemeire. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy van S-nek olyan x eleme, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta.$$

Legyen s az S félcsoport tetszőleges eleme. Mivel α és β az S balról kompatibilis relációi, ezért

$$(sa, sx) \in \alpha \quad \text{és} \quad (sx, sb) \in \beta,$$

amiből

$$(sa, sb) \in \alpha \circ \beta$$

következik. Ebből már adódik a tétel balról kompatibilis relációkra vonatkozó állítása. A jobbról kompatibilis relációkra vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. □

2.19. Definíció *Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját balkongruenciának nevezzük, σ balról kompatibilis az S-beli műveletre nézve, azaz ha S tetszőleges a, b, s elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$ feltételből $(sa, sb) \in \sigma$ következik. A jobbkongruencia fogalma a balkongruencia fogalmának duálisa.*

2.20. Definíció *Egy S félcsoport valamely α relációjáról akkor mondjuk, hogy kompatibilis (az S-beli műveletre nézve), ha tetszőleges S-beli a, b, c, d elemek esetén az $(a, b) \in \alpha$ és $(c, d) \in \alpha$ feltételekből $(ac, bd) \in \alpha$ következik.*

2.21. Definíció *Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját kongruenciarelációnak (röviden: kongruenciának) nevezzük, ha kompatibilis az S-beli műveletre nézve, azaz S tetszőleges a, b, c, d elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$, $(c, d) \in \sigma$ feltételekből $(ac, bd) \in \sigma$ következik.*

2.22. Tétel *Egy S félcsoport valamely ekvivalenciarelációja akkor és csak akkor kongruenciareláció, ha az balkongruencia és egyben jobbkongruencia.*

Bizonyítás. Legyen σ egy S félcsoport valamely ekvivalenciarelációja. Ha σ kongruencia és $(a,b) \in \sigma$, $(a,b \in S)$, akkor tetszőleges S-beli c elem esetén (mivel $(c,c) \in \sigma$) következik, hogy

$$(ca, cb) \in \sigma$$

és

$$(ac, bc) \in \sigma.$$

Fordítva, ha σ balkongruencia és jobbkongruencia, akkor tetszőleges S-beli a, b, c, d eleleme esetén az $(a,b) \in \sigma$, $(c,d) \in \sigma$ feltételekből

$$(ac, bc) \in \sigma \quad \text{és} \quad (bc, bd) \in \sigma$$

következik. Mivel σ tranzitív, ezért

$$(ac, bd) \in \sigma.$$

2.23. Megjegyzés *Ha ϱ_0 egy S félcsoport tetszőleges relációja, akkor a ϱ_0-t tartalmazó kongruenciák halmaza nem üres, mivel ω, azaz az S univerzális relációja kongruencia és $\varrho_0 \subseteq \omega$. Mivel kongruenciák bármely rendszerének metszete is kongruencia, ezért létezik egy, a ϱ_0-t tartalmazó legszűkebb ϱ kongruencia; ez a ϱ_0-t tartalmazó összes S-beli kongruenciának a metszete. Könnyen ellenőrízhető, hogy az S félcsoport valamely a és b elemeire $(a,b) \in \varrho$ akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az S félcsoport elemeinek olyan véges*

$$a = c_0, c_1, \ldots, c_n = b$$

sorozata, hogy minden $i = 1, \ldots n-1$ indezhez megadhatók olyan

$$u_i, v_i \in S \quad \textit{és} \quad x_i, y_i \in S^1$$

elemek, hogy

$$c_i = x_i u_i y_i, \quad c_{i+1} = x_i v_i y_i, \quad \textit{és} \quad (u_i, v_i) \in \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota.$$

2.24. Tétel *Egy S félcsoport kongruenciáinak halmaza akkor és csak akkor részfélcsoportja a $\mathcal{B}_S$ relációfélcsoportnak, ha S tetszőleges α és β kongruenciái esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoport kongruenciáinak halmaza részfélcsoportja a $\mathcal{B}_S$ relációfélcsoportnak. Legyenek α és β az S félcsoport tetszőleges kongruenciái. Ekkor persze α is és β is egy-egy ekvivalenciarelációja az S félcsoportnak. A feltétel miatt $\alpha \circ \beta$ az S félcsoport kongruenciája, s ezért ekvivalenciarelációja is. Így A 2.16. Tétel miatt $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. Tehát az S félcsoport bármely két kongruenciája egymással felcserélhető.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport tetszőleges kongruenciái egymással felcserélhetőek. Legyenek α és β az S tetszőleges kongruenciái, tehát ekvivalenciarelációk.

A 2.16. Tétel értelmében $\alpha \circ \beta$ is ekvivalenciarelációja. Mivel α és β bal kompatibilis és jobb kompatibilis relációi S-nek, ezért a 2.18. Tétel miatt $\alpha \circ \beta$ bal kompatibilis és jobb kompatibilis ekvivalenciarelációi S-nek és így $\alpha \circ \beta$ az S félcsoport bal- és egyben jobbkongruenciája. A 2.22. Tétel miatt ebből már következik, hogy $\alpha \circ \beta$ az S félcsoport kongruenciája. Tehát az S félcsoport binér relációinak félcsoportján belül az S kongruenciáinak halmaza zárt a $\circ$ műveletre nézve, azaz S kongruenciáinak halmaza az S relációfélcsoportjának részfélcsoportja. $\square$

2.25. Megjegyzés *Egy S félcsoport kongruenciáinak $\mathcal{L}(S)$ halmaza a relációk tartalmazására, mint parciális rendezésre nézve háló. Ebben a hálóban az identikus reláció a legkisebb elem, az univerzális reláció a legnagyobb elem.*

2.26. Tétel *Legyen σ egy S félcsoport kongruenciarelációja. Ekkor a σ-osztályok S/σ faktorhalmaza a σ-osztályok $[a]_\sigma[b]_\sigma = [ab]_\sigma$ módon definiált szorzására nézve félcsoportot alkot.*

Bizonyítás. A σ ekvivalenciareláció S-beli műveletre való kompatibilitása miatt $[a]_\sigma[b]_\sigma = [ab]_\sigma$ művelet az S/σ faktorhalazon. Mivel tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén

$$([a]_\sigma[b]_\sigma)[c]_\sigma = [ab]_\sigma[c]_\sigma$$

$$= [(ab)c]_\sigma = [a(bc)]_\sigma = [a]_\sigma[bc]_\sigma$$
$$= [a]_\sigma([b]_\sigma[c]_\sigma),$$

ezért a művelet asszociatív, ami bizonyítja a tétel állítását. $\square$

2.27. Definíció *Az előző tételben szereplő félcsoportot az S félcsoport σ kongruencia szerinti faktorfélcsoportjának nevezzük.*

2.28. Definíció *Legyenek α és β egy S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\alpha \subseteq \beta$ teljesül. Jelölje β/α az S/α fektorfélcsoport azon binér relációját, amely szerint két S/α-beli $[a]_\alpha$ és $[b]_\alpha$ elemre*

$$[a]_\alpha \ \beta/\alpha \ [b]_\alpha \ \Leftrightarrow \ a \ \beta \ b.$$

2.29. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges $\alpha \subseteq \beta$ kongruenciái esetén β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciarelációja.*

Bizonyítás. Az világos, hogy β/α ekvivalenciareláció. Legyenek $[a]_\alpha$ és $[b]_\alpha$ az S/α faktorfélcsoport olyan elemei, amelyekre

$$[a]_\alpha \ \beta/\alpha \ [b]_\alpha$$

teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy $a\ \beta\ b$. Legyen $[s]_\alpha \in S/\alpha$ tetszőleges.

$$[s]_\alpha[a]_\alpha = [sa]_\alpha\ \beta/\alpha\ [sb]_\alpha = [s]_\alpha[b]_\alpha,$$

mert

$$sa\ \beta\ sb.$$

Tehát β/α az S/α faktorfélcsoport bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy β/α az S/α faktorfélcsoport jobb oldali kongruenciája. A 2.22. Tétel szerint β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciája. □

2.30. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges α kongruenciája esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az S/α faktorfélcsoport kongruenciái és az S félcsoport α-t tartalmazó kongruenciái között. Ennél a megfeleltetésnél az S valamely $\beta \supseteq \alpha$ kongruenciájának az S/α faktorfélcsoport β/α kongruenciája felel meg.*

Bizonyítás. A 2.29. Tétel szerint

$$\phi:\ \beta\ \mapsto\ \beta/\alpha$$

az S félcsoport α kongruenciáját tartalmazó kongruenciák halmazának az S/α faktorfélcsoport kongruenciáinak halmazába való egyértelmű leképezése. Megmutatjuk, hogy ϕ szürjektív és injektív.

Legyen β^* az S/α faktorfélcsoport tetszőleges kongruenciája. Jelölje β az S félcsoporton a következőképpen értelmezett relációt: valamely $a, b \in S$ elemek esetén

$$a\ \beta\ b\ \iff\ [a]_\alpha\ \beta^*\ [b]_\alpha.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy β az S félcsoport egy kongruenciarelációja, valamint hogy

$$\phi(\beta) = \beta/\alpha = \beta^*.$$

Tehát ϕ szürjektív.

A ϕ injektivitásának vizsgálatához tegyük fel, hogy

$$\phi(\beta) = \phi(\gamma)$$

teljesül az S félcsoport valamely α-t tartalmazó β és γ kongruenciáira. Tegyük fel, hogy

$$a\ \beta\ b$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor

$$[a]_\alpha\ \beta/\alpha\ [b]_\alpha,$$

és így a $\phi(\beta) = \phi(\gamma)$ feltétel miatt

$$[a]_\alpha \; \gamma/\alpha \; [b]_\alpha,$$

és így

$$a \; \gamma \; b.$$

Tehát

$$\beta \subseteq \gamma.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\gamma \subseteq \beta.$$

Tehát

$$\beta = \gamma.$$

Következésképpen ϕ injektív. □

2.4. Csoport-, illetve nullelemes csoport-kongruenciák

2.31. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoport és H az S tetszőleges nem üres részhalmaza. Akkor a*

$$\mathcal{P}_H = \{(a,b) \in S \times S : \; (\forall x, y \in S) \; xay \in H \;\Leftrightarrow\; xby \in H\}$$

reláció az S félcsoport egy kongruenciája; a

$$W_H = \{c \in S : \; (\forall x, y \in S) \; xcy \notin H\}$$

részhalmaz vagy üres vagy olyan ideálja S-nek, amely egy $\mathcal{P}_H$-osztály.

Bizonyítás. Az világos, hogy $\mathcal{P}_H$ ekvivalencia reláció. Mivel tetszőleges $a, b, c, x, y \in S$ elemek esetén az

$$x(ca)y \in H, \quad \text{azaz} \quad (xc)ay \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(xc)by \in H, \quad \text{azaz} \quad x(cb)y \in H,$$

ezért az

$$(a,b) \in \mathcal{P}_H$$

feltételből

$$(ca, cb) \in \mathcal{P}_H$$

következik. Tehát $\mathcal{P}_H$ az S félcsoport egy bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy $\mathcal{P}_H$ az S jobb oldali kongruenciája. Így a 2.22. Tétel szerint $\mathcal{P}_H$ az S félcsoport egy kongruenciája.

Ha $c \in W_H$ és $s, x, y \in S$ tetszőleges elemek, akkor $x(sc)y = (xs)cy \notin H$ és így $sc \in W_H$. Hasonlóan igazolható, hogy $cs \in W_H$. Tehát, ha W_H nem üres, akkor az S egy ideálja. Az világos, hogy (az utóbbi esetben) W_H egy $\mathcal{P}_H$-osztály. □

2.32. Definíció *Az előző lemmában definiált $\mathcal{P}_H$ kongruenciát a S félcsoport H részhalmaza által definiált főkongruenciának nevezzük.*

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges S félcsoport esetén S^1 jelöli azt a félcsoportot, amely megegyezik S-sel abban az esetben, ha S-ben van egységelem, egyébként pedig S-ből egy egységelem adjungálásával nyerhető.

2.33. Tétel *Legyen H egy S félcsoport tetszőleges nem üres részhalmaza. Akkor*

$$\mathcal{P}_H^1 = \{(a,b) \in S \times S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xay \in H \ \Leftrightarrow \ xby \in H\}$$

az S félcsoport kongruenciája; a H részhalmaz $\mathcal{P}_H^1$-osztályok uniója; a

$$W_H^1 = \{c \in S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xcy \notin H\}$$

részhalmaz vagy üres vagy olyan ideálja S-nek, amely egy $\mathcal{P}_H^1$-osztály.

Bizonyítás. Az világos, hogy $\mathcal{P}_H^1$ ekvivalenciareláció. Legyenek a és b az S félcsoport olyan elemei, amelyekre

$$(a,b) \in \mathcal{P}_H^1$$

teljesül. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Akkor minden $x, y \in S^1$ elemre

$$x(sa)y = (xs)ay \in H$$

akkor és csak kkor, ha

$$x(sb)y = (xs)by \in H.$$

Tehát

$$(sa, sb) \in \mathcal{P}_H^1,$$

és így $\mathcal{P}_H^1$ balkongruencia. Hasonlóan igazolható, hogy $\mathcal{P}_H^1$ jobbkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt $\mathcal{P}_H^1$ az S félcsoport kongruenciája.

Mivel tetszőleges $h \in H$ és $a \notin H$ elemek esetén

$$1h1 \in H \quad \text{és} \quad 1a1 \notin H,$$

ezért

$$(h, a) \notin \mathcal{P}_H^1.$$

Ebből már következik, hogy a H részhalmaz $\mathcal{P}_H^1$-osztályok uniója.

Legyen

$$c \in W_H^1$$

tetszőleges elem. Akkor az S félcsoport tetszőleges s eleme esetén

$$sc \in W_H^1.$$

Ellenkező esetben léteznének olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$(xs)cy = x(sc)y \in H$$

teljesülne, amiből

$$c \notin W_H^1$$

következne. Mivel ez ellentmond a $c \in W_H^1$ kiinduló feltételnek, ezért valóban

$$sc \in W_H^1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$cs \in W_H^1.$$

Tehát ha W_H^1 nem üres, akkor az S félcsoport ideálja. A definíció alapján világos, hogy (az utóbbi esetben) W_H^1 egy $\mathcal{P}_H^1$-osztály. □

2.34. Definíció *Egy S félcsoport H részhalmazát bal unitér részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $a, ab \in H$ feltételből $b \in H$ következik. A jobb unitér részhalmaz fogalma a bal unitér részhalmaz fogalmának duálisa. Egy részhalmazt unitér részhalmaznak nevezzük, ha az egyszerre bal unitér és jobb unitér részhalmaz.*

2.35. Tétel *Egy S félcsoport tetszőleges unitér H részfélcsoportja esetén $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1$. Továbbá az is igaz, hogy $W_H = W_H^1$.*

Bizonyítás. Az világos, hogy

$$\mathcal{P}_H^1 \subseteq \mathcal{P}_H$$

tetszőleges $H \subseteq S$ részhalmaz esetén. A fordított tartalmazási reláció igazolásához tekintsünk két elemet, a-t és b-t az S félcsoportból. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{P}_H$ valamely S-beli a és b elemek esetén. Legyenek $u, v \in S^1$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$uav \in H.$$

Akkor tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ elemek esetén

$$(h_1u)a(vh_2) \in H,$$

mert H részfélcsoport. Mivel $h_1u, vh_2 \in S$, ezért

$$(h_1u)b(vh_2) \in H.$$

Mivel H bal unitér, ezért a $h_1, h_1ubvh_2 \in H$ tartalmazásokból

$$ubvh_2 \in H$$

következik. Mivel H jobb unitér, ezért az $ubvh_2, h_2 \in H$ tartalmazásokból

$$ubv \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy ha $ubv \in H$, akkor $uav \in H$. Következésképpen

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H^1.$$

Így

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

Az világos, hogy ha $c \in W_H^1$ valamely $c \in S$ elemre teljesül, akkor $c \in W_H$. Ha pedig $d \in W_H$ teljesül valamely $d \in S$ elemre, akkor $d \in W_H^1$ is teljesül. Ugyanis, ha d nem lenne eleme W_H^1-nak, akkor léteznének olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre $xdy \in H$ teljesülne. Akkor viszont tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ elemek esetén $(h_1x)d(yh_2) \in H$ teljesülne, mivel H részfélcsoport. Ez viszont azt jelentené, hogy $d \notin W_H$, mivel $h_1x, yh_2 \in S$. Ez pedig ellentmondás. Az előzőekből már következik, hogy $W_H = W_H^1$. $\square$

2.36. Definíció *Egy S félcsoport valamely H részhalmazát reflexív részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ esetén $ab \in H$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ba \in H$.*

2.37. Definíció *Egy félcsoportot nullelemes csoportnak nevezünk, ha valamely G csoportból úgy származtatható, hogy G-hez egy nullelemet adjungálunk.*

2.38. Tétel *Ha H egy S félcsoport reflexív és unitér részfélcsoportja, akkor az $S/\mathcal{P}_H$ faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport.*

Fordítva, ha σ egy S félcsoport olyan kongruenciája, hogy az S/σ faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport, akkor megadható az S félcsoportnak olyan reflexív és unitér H részfélcsoportja, amelyre $\sigma = \mathcal{P}_H$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen H egy S félcsoport reflexív unitér részfélcsoportja. A 2.31. Tétel, illetve a 2.33. Tétel szerint $\mathcal{P}_H$, illetve $\mathcal{P}_H^1$ az S félcsoport kongruenciái. Mivel a feltétel szerint H unitér, ezért

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

A 2.33. Tétel szerint W_H egy $\mathcal{P}_H$-osztály, H pedig osztályok uniója. Legyenek $a, b \in H$ tetszőleges elemek. Megmutatjuk, hogy H egyetlen osztály. Tegyük fel, hogy $xay \in H$ valamely $x, y \in S$ elemekre. Mivel H reflexív, ezért

$$yxa \in H.$$

Mivel H unitér és $a \in H$, ezért

$$yx \in H.$$

Mivel H részfélcsoport és $b \in H$, ezért

$$yxb \in H,$$

amiből H reflexivitása miatt

$$xby \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy az $xby \in H$ feltételből $xay \in H$ következik. Tehát

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H.$$

Következésképpen H egy $\mathcal{P}_H$-osztály.

Legyenek $a, b \in S \setminus W_H$ tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, melyekre

$$xay, ubv \in H$$

teljesül. Mivel H reflexív, ezért

$$yxa, bvu \in H.$$

Mivel H részfélcsoport, ezért

$$yxabvu \in H,$$

amiből

$$ab \notin W_H$$

következik. Így $S \setminus W_H$ félcsoport. Ha W_H nem üres, akkor az $S/\mathcal{P}_H$ faktorfélcsoportban a W_H-nak megfelelő elem nullelem (mivel az S ideálja), s a faktorfélcsoport úgy áll elő, hogy annak egy részfélcsoportjához ($(S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$-hoz) a W_H-nak megfelelő nullelem van adjungálva. Megmutatjuk, hogy $(S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$ a faktorfélcsoport egy részcsoportja. Legyenek $s, x, y \in S$ és $h \in H$ tetszőleges elemek. H reflexivitása miatt

$$xshy \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$yxsh \in H,$$

amely a H unitér volta miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$yxs \in H.$$

Ez utóbbi tartalmazás a H reflexivitása miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$xsy \in H.$$

Következésképpen H a faktorfélcsoport jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy bal oldali egységelem is. Legyen $a \in S \setminus W_H$ tetszőleges elem. Akkor vannak olyan S-beli x és y elemek, hogy

$$xay \in H,$$

azaz

$$yxa \in H.$$

Mivel $yx \notin W_H$, ezért az yx elemet tartalmazó $\mathcal{P}_H$-osztály az a elemet tartalmazó $\mathcal{P}_H$-osztály bal oldali inverze. Ezzel beláttuk, hogy az $S/\mathcal{P}_H$ faktorfélcsoport vagy csoport vagy nullelemes csoport.

Megfordítva, legyen α egy S félcsoport olyan kongruenciája, melyre az S/α faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport. Jelölje H az S félcsoport azon α-osztályát, amely a faktorfélcsoport egységeleme. Az világos, hogy H reflexív és unitér részfélcsoportja S-nek. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}_H = \alpha$. Jelölje φ az S félcsoportnak az S/α faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Az

$$a, b \in W_H$$

feltétel akkor és csak akkor teljesül, minden $x, y \in S$ elem esetén

$$xay, xby \notin H,$$

azaz

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) \neq e, \quad \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y) \neq e,$$

ahol e jelöli az S/α faktorfélcsoport egységelemét. Ez utóbbi pedig azzal ekvivalens, hogy

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

ahol 0 jelöli az S/α faktorfélcsoport nullelmét. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $a, b \in S \setminus W_H$. Ha

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H$$

akkor vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyek esetén

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = e = \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y).$$

Ebből

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

adódik, azaz

$$(a, b) \in \alpha.$$

Fordítva, ha

$$(a, b) \in \alpha,$$

akkor minden $x, y \in S$ elemre

$$(xay, xby) \in \alpha,$$

és ezért $xay \in H$ akkor és csak akkor, ha $xby \in H$, mivel H egy α-osztálya S-nek. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{P}_H = \alpha$. $\square$

Feladatok

2.1. Feladat *(Megoldás: 17.5.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges S félcsoport esetén* $\sigma = \{(a,b) \in S \times S : \ (\exists n \in N^+) \ ab^n = b^{n+1}, \ ba^n = a^{n+1}\}$ *ekvivalenciareláció!*

2.2. Feladat *(Megoldás: 17.6.) Mutassuk meg, hogy tetszőlege jobb zéró [bal zéró] félcsoport minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció!*

2.3. Feladat *(Megoldás: 17.7.) Mutassuk meg, hogy egy S jobb zéró [bal zéró] félcsoportban minden α és β kongruenciára akkor és csak akkor teljesül az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség, ha $|S| \leq 2$.*

2.4. Feladat *(Megoldás: 17.8.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félhálóban megadhatók olyan α és β kongruenciák, amelyekre nem teljesül az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség!*

2.5. Feladat *(Megoldás: 17.9.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges S félcsoport esetén az* $\varrho = \{(a,b) \in S \times S : \ (\forall x \in S) \ xa = xb\}$ *reláció kongruenciareláció!*

3. fejezet

Félcsoport homomorfizmusai

3.1. Definíció *Egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való ϕ leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha S tetszőleges a és b elemei esetén $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ teljesül. Ha a ϕ homomorfizmus szürjektív, akkor azt is szoktuk mondani, hogy ϕ epimorfizmus , és ekkor T az S félcsoport homomorf (vagy epimorf) képe. Ha a ϕ homomorfizmus injektív, akkor azt mondjuk, hogy ϕ az S félcsoportnak a T félcsoportba való beágyazása. Ha a ϕ homomorfizmus bijektív (azaz szürjektív és injektív), akkor azt mondjuk, hogy ϕ az S félcsoportnak a T félcsoportra való izomorfizmusa ; ekkor ϕ inverze T-nek S-re való izomorfizmusa, s ezért azt is mondjuk, hogy S és T egymással izomorfak. Egy félcsoport önmagába való homomorfizmusait a félcsoport endomorfizmusainak, önmagára való izomorfizmusait pedig a félcsoport automorfizmusainak nevezzük. Egy S félcsoport endomorfizmusai a leképezések kompozíciójára nézve monoidot (egységelemes félcsoportot) alkotnak, melyben az invertálható elemek az S automorfizmusai.*

3.2. Megjegyzés *Ha σ egy S félcsoport kongruenciarelációja, akkor a $\varphi : s \mapsto [s]_\sigma$ $(s \in S)$ az S félcsoportnak az S/σ faktorfélcsoportra való homomorfizmusa. Ezt a homomorfizmust természetes (vagy kanonikus) homomorfizmusnak nevezzük.*

3.3. Lemma *Legyen φ egy S félcsoportnak valamely T félcsoportba való homomorfizmusa. Akkor $ker_\varphi = \{(a, b) \in S \times S : \varphi(a) = \varphi(b)\}$ az S félcsoport kongruenciája.*

Bizonyítás. Az világos, hogy $\ker_\varphi$ ekvivalenciareláció. Mivel tetszőleges $a, b, s \in S$ elemekre az $(a, b) \in \ker_\varphi$ feltételből

$$\varphi(sa) = \varphi(s)\varphi(a) = \varphi(s)\varphi(b) = \varphi(sb)$$

következik, ezért ker_φ balkongruencia S-en. Hasonlóan bizonyítható, hogy ker_φ jobbkongruencia S-en. □

3.4. Definíció *Ha φ egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való homomorfizmusa, akkor az S félcsoport ker_φ kongruenciáját a φ homomorfizmus magjának nevezzük.*

3.5. Megjegyzés *Ha σ az S félcsoport egy kongruenciája és φ S-nek az S/σ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa, akkor $ker_\varphi = \sigma$*

3.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek

3.6. Tétel *(Homomorfizmustétel) Ha φ az S félcsoportnak egy T félcsoportra való (szürjektív) homomorfizmusa, akkor $T \cong S/ker_\varphi$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in T$ esetén legyen

$$\Phi(x) = [a]_{\mathrm{ker}_\varphi},$$

ahol $a \in S$ olyan elem, amelyre $x = \varphi(a)$ teljesül. Ha

$$\varphi(a) = x = \varphi(b)$$

teljesül valamely $a, b \in S$ elemekre, akkor

$$[a]_{\mathrm{ker}_\varphi} = [b]_{\mathrm{ker}_\varphi},$$

amiből következik, hogy Φ a T félcsoportnak az S/ker_φ faktorfélcsoportba való jól definiált, egyértelmű leképezése. A φ szürjektivitása azt biztosítja, hogy minden $t \in T$ elemnek legyen képe. A ϕ azért szürjektív, mert φ értelmezési tartománya S. A Φ injektivitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\Phi(\varphi(a)) = \Phi(\varphi(b))$$

valamely $a, b \in S$ elemek esetén. Akkor

$$[a]_{\mathrm{ker}_\varphi} = [b]_{\mathrm{ker}_\varphi},$$

azaz

$$(a, b) \in ker_\varphi,$$

és ezért

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Tehát Φ valóban injektív. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$\Phi(\varphi(a)\varphi(b)) = \Phi(\varphi(ab)) = [ab]_{\mathrm{ker}_\varphi} = [a]_{\mathrm{ker}_\varphi}[b]_{\mathrm{ker}_\varphi} = \Phi(\varphi(a))\Phi(\varphi(b)),$$

ezért Φ homomorfizmus. Tehát Φ a T félcsoportnak az S/ker_φ faktorfélcsoportra való izomorfizmusa. $\square$

3.7. Következmény *Tetszőleges S félcsoport esetén, ha $\varphi_1 : S \mapsto T_1$ és $\varphi_2 : S \mapsto T_2$ olyan szürjektív homomorfizmusok, melyekre $ker_{\varphi_1} = ker_{\varphi_2}$ teljesül, akkor $T_1 \cong T_2$.*

Bizonyítás. Az állítás a homomorfizmustétel következménye, mert

$$T_1 \cong S/ker_{\varphi_1} \cong S/ker_{\varphi_2} \cong T_2.$$

□

3.8. Lemma *Legyen S tetszőleges félcsoport és H az S-nek egy részfélcsoportja. Akkor S tetszőleges σ kongruenciája esetén*

$$[H]_\sigma = \{s \in S : \ (\exists h \in H)\ (s, h) \in \sigma\}$$

az S félcsoport részfélcsoportja.

Bizonyítás. Ha $s_1, s_2 \in [H]_\sigma$, akkor

$$(s_1, h_1), (s_2, h_2) \in \sigma$$

alkalmas $h_1, h_2 \in H$ elemekkel. Mivel

$$h_1 h_2 \in H$$

és

$$(s_1 s_2, h_1 h_2) \in \sigma,$$

ezért $[H]_\sigma$ részfélcsoportja S-nek. □

Legyen σ egy S félcsoport kongruenciája. Legyen X az S egy nem üres részhalmaza. Jelölje $\sigma|_X$ a σ kongruencia X-re való leszűkítését, azaz $\sigma|_X = \{x, y \in X \times X : \ (x, y) \in \sigma\}$.

Ha X σ-osztályok uniója, akkor $\sigma|_X$ helyett σ-t is fogunk használni.

3.9. Tétel *(I. Izomorfizmustétel) Legyen σ az S félcsoport tetszőleges kongruenciája, H pedig tetszőleges részfélcsoportja. Akkor $[H]_\sigma/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$.*

Bizonyítás. Legyen φ a $[H]_\sigma$ félcsoportnak a $[H]_\sigma/\sigma$ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa. A $[H]_\sigma$ definíciója miatt

$$\varphi([H]_\sigma) = \varphi(H),$$

és így φ-nek H-ra való leszűkítés H-nak $\varphi([H]_\sigma)$-ra való homomorfizmusa, melynek magja $\sigma|_H$. Ezért

$$[H]_\sigma/\sigma \cong H/(\sigma|_H).$$

3.10. Tétel *(II. Izomorfizmustétel) Legyenek α és β egy S félcsoport tetszőleges kongruenciái az $\alpha \subseteq \beta$ feltétellel. Akkor*

$$\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in S/\alpha \times S/\alpha : \ (a,b) \in \beta\}$$

$(a, b \in S)$ az S/α faktorfélcsoport kongruenciája, és $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$.

Bizonyítás. A 2.29. Tétel szerint β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciája. Legyenek φ_1, illetve φ_2 az S-nek S/α-ra, illetve S/α-nak $(S/\alpha)(\beta/\alpha)$-ra való természetes homomorfizmusai. Valamely $a, b \in S$ elemekre

$$(a,b) \in ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} \ \Leftrightarrow \ ((a)\varphi_1)\varphi_2 = ((b)\varphi_1)\varphi_2 \ \Leftrightarrow \ ([a]_\alpha)\varphi_2 = ([b]_\alpha)\varphi_2;$$

az utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta/\alpha,$$

ami az $(a,b) \in \beta$ teljesülését jelenti. Tehát $ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = \beta$. A homomorfizmustétel miatt $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$. □

3.11. Tétel *Legyen α egy S félcsoport tetszőleges kongruenciája. A $\beta \mapsto \overline{\beta} = \beta/\alpha$ leképezés az S félcsoport α-t tartalmazó kongruenciáinak hálóját izomorf módon képezi le az S/α faktorfélcsoport kongruenciáinak hálójára.*

Bizonyítás. Az S/α faktorfélcsoport tetszőleges β kongruenciája esetén jelölje β^* az S félcsoport azon relációját, amelynél az S két eleme, mondjuk a és b, akkor és csak akkor állnak relációban, ha $([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta$. Könnyen igazolható, hogy β^* az S félcsoport kongruenciája és $\overline{\beta^*} = \beta$. Mivel az S félcsoport tetszőleges $\tau \supseteq \alpha$ kongruenciája esetén $(\overline{\tau})^* = \tau$, ezért a $\varrho \mapsto \overline{\varrho}$ és $\tau \mapsto \tau^*$ leképezések egymás inverzei. Így $\beta \mapsto \overline{\beta} = \beta/\alpha$ leképezés az S félcsoport α-t tartalmazó kongruenciáinak hálóját bijektív módon képezi az S/α félcsoport kongruenciáinak hálójára. Itt nem részletezzük, de könnyen igazolható, hogy a leképezés (háló-) homomorfizmus. □

3.2. Szabad félcsoportok

Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmax esetén jelölje $\mathcal{F}_X$ az X elemeiből képezhető összes véges sorozatok halmazát. Ezen az X halmazon értelmezünk egy szorzásnak nevezett $\cdot$ műveletet a következőképpen. Tetszőleges X-beli $[x_1, \ldots, x_m]$ és $[y_1, \ldots, y_n]$ sorozatok esetén legyen $[x_1, \ldots, x_m] \cdot [y_1, \ldots, y_n] = [x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$.

3.12. Tétel *Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz esetén $(\mathcal{F}_X; \cdot)$ félcsoport.*

Bizonyítás. Legyenek $\omega_1 = [x_1, \ldots, x_k], \omega_2 = [y_1, \ldots, y_m], \omega_3 = [z_1, \ldots, z_n]$ tetszőleges $\mathcal{F}_X$-beli sorozatok. Akkor

$$(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 = [x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m] \cdot \omega_3 =$$
$$= [x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n] =$$
$$= \omega_1 \cdot [y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n] = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3).$$

□

3.13. Definíció *Az előzőekben definiált $(\mathcal{F}_X; \cdot)$ félcsoportot az X halmaz feletti szabad félcsoportnak nevezzük. Az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoport segítségével képezett $\mathcal{F}_X^1$ monoidot (egységelemes félcsoportot) az X halmaz feletti szabad monoidnak nevezzük; az $\mathcal{F}_X$-hez adjungált egységelemre az "üres szó" kifejezéssel szoktunk hivatkozni.*

3.14. Tétel *Azonosítva az X halmaz x elemét az egyelemű $[x]$ sorozattal, X az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoport egy generátorredszere.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $\mathcal{F}_X$-beli $[x_1, \ldots, x_m]$ sorozat esetén

$$[x_1, \ldots, x_m] = [x_1] \cdot [x_2] \cdots [x_m],$$

ezért az állítás nyilvánvaló. □

Az előző tétel alapján az $\mathcal{F}_X$-beli tetszőleges $[x_1, \ldots, x_m]$ sorozatot $x_1 \cdots x_m$ szorzatalakban is írhatjuk.

3.15. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoport és $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Akkor X-nek az S-be való tetszőleges egyértelmű ϕ leképezéséhez megadható az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoportnak az S félcsoportba való olyan ϕ^* homomorfizmusa, melynek X-re való leszűkítése egyenlő ϕ-vel, azaz $\phi(x) = \phi^*(x)$ teljesül minden $x \in X$ elemre.*

Bizonyítás. Valamely $\phi : X \mapsto S$ leképezés esetén értelmezzünk egy

$$\phi^* : \mathcal{F}_X \mapsto S$$

leképezést a következőképpen. Tetszőleges $x_1 \cdots x_m \in \mathcal{F}_X$ esetén legyen

$$\phi^*(x_1 \cdots x_m) = \phi(x_1) \cdots \phi(x_m).$$

Mivel tetszőleges

$$x_1 \cdots x_m; \quad y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_X$$

elemek esetén

$$\phi^*((x_1 \cdots x_m) \cdot (y_1 \cdots y_n)) = \phi^*(x_1 \cdots x_m \cdot y_1 \cdots y_n) =$$
$$= \phi^*(x_1 \cdots x_m)\phi^*(y_1 \cdots y_n)$$

teljesül, ezért ϕ^* az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoportnak az S félcsoportba való homomorfizmusa. A $\phi(x) = \phi^*(x)$ egyenlőségnek minden $x \in X$ elemre való teljesülése nyilvánvaló. □

3.16. Tétel *Minden S félcsoport izomorf egy szabad félcsoport valamely faktorfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. Tekintsük az S halmaz feletti szabad félcsoportot. Jelölje ϕ az S halmaz identikus leképezését. A 3.15. Tétel szerint megadható az $\mathcal{F}_S$ szabad félcsoportnak az S félcsoportra olyan ϕ^* szürjektív homomorpizmusa, melynek S-re való leszűkítése ϕ. Így a félcsoportokra érvényes homomorfizmus-tétel szerint az S félcsoport izomorf az $\mathcal{F}_X/ker\phi^*$ faktorfélcsoporttal. $\square$

Az előzőek alapján lehetőségünk van arra, hogy konstruáljunk olyan S félcsoportot, amelyet valamely X részhalmaza generál, és a generáló elemekre valamely $v_i = w_i$ $(i \in I)$ azonosságok, másnéven definiáló relációk teljesülnek (v_i és w_i a generálóelemek valamely véges szorzatai). Tekintsük az X halmaz feletti $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoportot. A v_i, illetve w_i szorzatok egyértelműen meghatározzák $\mathcal{F}_X$ egy-egy v_i', illetve w_i' elemét. Például, ha $v_i = x_1x_2^3$ $(x_1, x_2 \in X)$, akkor v_i' az $[x_1, x_2, x_2, x_2] \in \mathcal{F}_X$ elemét jelenti. Jelölje ϱ_0 az $\mathcal{F}_X$ félcsoport azon binér relációját, amelyet a (v_i', w_i') $(i \in I)$ párok alkotnak. Jelölje ϱ az $\mathcal{F}_X$ félcsoport ϱ_0 relációja által generált kongruenciáját. Jelölje φ az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoportnak az $\mathcal{F}_X/\alpha^*$ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Világos, hogy $\varphi(X)$ az S félcsoport generátorrendszere és $\varphi(v_i) = \varphi(w_i)$ miatt S-ben a $\varphi(X)$ generátorrendszer elemeire teljesülnek az előírt definiáló relációk.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

3.17. Tétel *Legyen ϱ egy X halmaz feletti $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoport valamely ϱ_0 relációja által generált kongruencia. Legyen φ az $\mathcal{F}_X$ szabad félcsoportnak az $\mathcal{F}_X/\varrho$ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa. Legyen S egy félcsoport és ϕ az $\mathcal{F}_X$-nek S-be való olyan homomorfizmusa, amelyre $\phi(u) = \phi(v)$ teljesül minden $(u, v) \in \varrho_0$ párra. Akkor van az $\mathcal{F}_X/\varrho$ faktorfélcsoportnak az S félcsoportba olyan θ homomorfizmusa, hogy tetszőleges $w \in \mathcal{F}_X$ elem esetén $\theta(\varphi(w)) = \phi(w)$ teljesül.*

Feladatok

3.1. Feladat *(Megoldás: 17.10.) Mutassuk meg, hogy egy $\mathcal{F}$ félcsoport akkor és csak akkor egy X halmaz feletti szabad félcsoport, ha tetszőleges S félcsoport és X-nek S-be való tetszőleges f leképezéséhez megadható $\mathcal{F}$-nek S-be való olyan homomorfizmusa, melynek X-re való leszűkítése megegyezik f-fel.*

3.2. Feladat *(Megoldás: 17.11.) Mutassuk meg, hogy ha X és Y olyan halmazok, melyek között létezik egy bijektív leképezés, akkor az X és az Y feletti szabad félcsoportok egymással izomorfak.*

4. fejezet

Félcsoport ideáljai, a Green-relációk

Mint ahogy azt már az 1. Fejezetben definiáltuk (1.27.Definíció), egy S félcsoport valamely nem üres L részhalmazát bal oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in L$ elem esetén $sa \in L$. Egy S félcsoport nem üres R részhalmazát jobb oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és $a \in R$ esetén $as \in R$. Ha I jobb oldali és bal oldali ideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja, vagy röviden ideálja S-nek. Néha célszerű az üres halmazt is ideálnak tekinteni. A későbbiekben látni fogunk erre két példát (4.31. Definíció, 4.34. Definíció).

4.1. Definíció *Egy S félcsoport S-től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot egyszerűnek nevezünk, ha nincs nem valódi ideálja.*

4.2. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha $S = SaS$ teljesül minden a eleme esetén.*

Bizonyítás. Az világos, hogy tetszőleges S félcsoport tetszőleges a eleme esetén SaS az S egy ideálja. Így, ha S egy egyszerű félcsoport, akkor tetszőleges $a \in S$ elem esetén $S = SaS$.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelyre tetszőleges $a \in S$ esetén teljesül az $S = SaS$ egyenlőség. Legyen I az S egy ideálja. Akkor tetszőleges $a \in I$ elem esetén

$$S = SaS \subseteq I,$$

amiből

$$I = S$$

következik. Tehát S-nek nincs valódi ideálja, azaz S egyszerű félcsoport. □

4.3. Megjegyzés *Egy legalább kételemű 0-elemes S félcsoport nem lehet egyszerű, mert $\{0\}$ ideálja S-nek.*

4.4. Definíció *Egy* 0*-elemes* S *félcsoport* $\{0\}$*-tól és* S*-től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük.*

4.5. Megjegyzés *Ha egy* 0*-elemes* S *félcsoportnak nincsenek valódi ideáljai, akkor* $S^2 = \{0\}$ *vagy* $S^2 = S$*, mert* S^2 *az* S *ideálja. Az első esetben* S*-nek minden,* 0*-át tartalmazó részhalmaza ideálja* S*-nek, ezért* S *legfeljebb kételemű félcsoport.*

4.6. Definíció *Egy* 0*-elemes* S *félcsoportot* 0*-egyszerűnek nevezünk, ha* $S^2 \neq \{0\}$ *és* S*-nek nincsenek valódi (azaz* $\{0\}$*-tól és* S*-től különböző) ideáljai.*

4.7. Tétel *Egy* 0*-elemes* S *félcsoport akkor és csak akkor* 0*-egyszerű, ha minden* $0 \neq a \in S$ *elem esetén* $SaS = S$*.*

Bizonyítás. Legyen S 0-egyszerű félcsoport. Akkor $S = S^2 \neq \{0\}$. Legyen

$$B = \{b \in S : \ SbS = \{0\}\}.$$

Az világos, hogy B az S félcsoport ideálja. Ha $B \neq \{0\}$ teljesülne, akkor B megegyezne S-sel, amiből $S^3 = \{0\}$ és így $S^2 = \{0\}$ adódna, ami ellentmondás. Tehát $B = \{0\}$, azaz $SaS = S$ minden $0 \neq a \in S$ elemre.

Fordítva, legyen S olyan nullelemes félcsopoprt, amelyben $SaS = S$ teljesül minden $0 \neq a \in S$ elemre. Akkor $S^3 = S$, amiből $S^2 \neq \{0\}$ következik. Legyen A az S félcsoport tetszőleges nem-nulla ideálja. Akkor tetszőleges $0 \neq a \in A$ esetén $S = SaS \subseteq SAS \subseteq A$, amiből $A = S$ adódik. Tehát S 0-egyszerű félcsoport. □

4.8. Megjegyzés *Ha egy egyszerű félcsoporthoz egy nullelemet adjungálunk, akkor* 0*-egyszerű félcsoportot kapunk. Ha egy* 0*-egyszerű félcsoport olyan, hogy nem tartalmaz* 0*-tól különböző nullosztót, azaz a félcsoport tetszőleges* a, b *elemei esetén* $ab = 0$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a = 0$ *vagy* $b = 0$*, akkor a* 0*-elem elhagyásával olyan félcsoport keletkezik, amelyik egyszerű.*

4.1. Minimális, 0-minimális ideálok

4.9. Definíció *Egy* S *félcsoport valamely* M *ideálját minimális ideálnak nevezzük, ha nem tartalmazza valódi módon* S *egyetlen ideálját sem.*

4.10. Megjegyzés *Ha* A *és* B *egy* S *félcsoport ideáljai, akkor* AB *is ideálja* S*-nek és* $AB \subseteq A \cap B$*. Ebből következik, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy minimális ideálja van. Ha egy félcsoportnak van minimális ideálja, akkor azt a félcsoport magjának nevezzük. Könnyen látható, hogy egy félcsoportnak akkor és csak akkor van magja, ha összes ideáljának metszete nem üres.*

4.11. Tétel *Ha M egy S félcsoport minimális ideálja, akkor M egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen M egy S félcsoport minimális ideálja. Mivel $M^2 \subseteq M$ és M^2 az S ideálja, ezért $M^2 = M$. Legyen $a \in M$ tetszőleges elem. Mivel S^1aS^1 az S félcsoport M által tartalmazott ideálja, ezért $S^1aS^1 = M$. Innen $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$ következik. Ezért $MaM = M$. A 4.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy M egyszerű. □

4.12. Következmény *Ha egy félcsoportnak van magja, akkor ez a mag egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. A 4.11. Tétel alapján az állítás nyilvánvaló. □

4.13. Megjegyzés *Ha egy S félcsoport tartalmaz egy 0-elemet, akkor az az S félcsoport minden ideáljában benne van, s ezért S-nek egyetlen minimális ideálja a $\{0\}$.*

4.14. Definíció *Egy nullelemet tartalmazó S félcsoport valamely M ideálját 0-minimális ideálnak nevezzük, ha $M \neq \{0\}$ és 0 az egyetlen olyan ideálja S-nek, amelyet M valódi módon tartalmaz.*

4.15. Tétel *Ha M egy 0-minimális ideálja egy nullelemes S félcsoportnak, akkor $M^2 = \{0\}$ vagy M 0-egyszerű részfélcsoportja S-nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M^2 \neq \{0\}$. Akkor $M^2 = M$. Legyen $a \in M$, $a \neq 0$ tetszőleges elem. Mivel S^1aS^1 az S félcsoport M által tartalmazott, nullelemtől különböző ideálja, ezért $S^1aS^1 = M$. Innen $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$ következik. Ezért $MaM = M$. A 4.7. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy M 0-egyszerű. □

4.16. Tétel *Ha M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül, akkor S minden $\{0\} \neq L \subseteq M$ bal oldali ideálja esetén $L^2 \neq \{0\}$.*

Bizonyítás. Legyen L az S félcsoport olyan nem-nulla bal oldali ideálja, amely a 0-minimális M ideálnak részhalmaza. Akkor LS az S félcsoport olyan kétoldali ideálja, amelyre

$$LS \subseteq M$$

teljesül. Mivel M 0-minimális ideálja S-nek, ezért

$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = M.$$

Ha $LS = \{0\}$, akkor $0 \in L$ miatt L kétoldali ideálja S-nek, s ezért az $L \neq \{0\}$ feltétel miatt

$$L = M.$$

Így
$$M^2 = LM \subseteq LS = \{0\},$$
ami viszont ellentmond az M-re vonatkozó $M^2 \neq \{0\}$ feltételnek. Ezért
$$LS = M.$$
Ekkor viszont
$$M = M^2 = LSLS \subseteq L^2S,$$
amiből már következik $L^2 \neq \{0\}$. □

4.2. 0-minimális bal oldali ideálok

4.17. Definíció *Egy nullelemes S félcsoport $\{0\} \neq L$ bal oldali ideálját 0-minimális bal oldali ideálnak nevezzük, ha 0 az egyetlen olyan bal oldali ideálja S-nek, amelyet M valódi módon tartalmaz.*

4.18. Tétel *Ha L egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre $L^2 \neq \{0\}$ teljesül, akkor fennáll az $L = Sa$ egyenlőség tetszőleges $0 \neq a \in L$ elemre.*

Bizonyítás. Legyen L a 0-elemes S félcsoport olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre $L^2 \neq \{0\}$ teljesül. Legyen $0 \neq a \in L$ tetszőleges elem. Az világos, hogy Sa az S olyan legalább kételemű bal oldali ideálja, amelyik az L egy részhalmaza. Megmutatjuk, hogy $Sa \neq= \{0\}$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy $Sa = \{0\}$. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Akkor
$$s\{0, a\} = \{0, sa\} = \{0\} \subseteq \{0, a\},$$
azaz $\{0, a\}$ az S félcsoport bal oldali ideálja. Ebből az $a^2 = 0$ egyenlőség is adódik. Mivel $a \neq 0$ és $\{0, a\} \subseteq L$, ezért az L bal oldali ideál 0-minimális volta miatt $L = \{0, a\}$. Ebből pedig $L^2 = \{0\}$ következik, amely ellentmond az eredeti $L^2 \neq \{0\}$ feltételnek. Tehát $Sa \neq \{0\}$. Ebből pedig $Sa = L$ következik, mert L az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. □

4.19. Tétel *Ha L egy nullelemes S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja, akkor tetszőleges $s \in S$ elem esetén $Ls = \{0\}$ vagy Ls az S egy 0-minimális bal oldali ideálja.*

Bizonyítás. Legyen L a 0-elemes S félcsoport tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Tegyük fel, hogy $Ls \neq \{0\}$. Az világos, hogy Ls az S félcsoport bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy Ls az S 0-minimális bal oldali ideálja is. Ehhez tekintsük S-nek olyan tetszőleges A bal oldali ideálját, amelyet az Ls bal oldali ideál tartalmaz. A bizonyítás akkor lesz kész, ha megmutatjuk, hogy $A = \{0\}$ vagy $A = Ls$. Ehhez először is definiáljuk a következő halmazt:

$$B = \{b \in L : \; bs \in A\}.$$

A B definíciója miatt világos, hogy

$$Bs \subseteq A.$$

Legyen x az A tetszőleges eleme. Mivel $A \subseteq Ls$, ezért létezik olyan $t \in L$ elem, hogy $x = ts$. Ezen utóbbi egyenlőségből viszont $t \in B$ következik, tehát $x \in Bs$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$A \subseteq Bs.$$

Ebből és a fenti $Bs \subseteq A$ tartalmazásból

$$A = Bs$$

adódik. A következőkben megmutatjuk, hogy B az S félcsoport bal oldali ideálja. Legyenek $t \in S$ és $b \in B$ tetszőleges elemek. Akkor

$$tbs \in tA \subseteq A.$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$tb \in tL \subseteq L.$$

Tehát tb az L olyan eleme, amelyre $tbs \in A$ teljesül, amiből a B definíciója miatt

$$tb \in B$$

következik. Tehát B az S bal oldali ideálja. Az L bal oldali ideál 0-minimalitása miatt $B = \{0\}$ vagy $B = L$. Az első esetben

$$A = \{0\},$$

a második esetben

$$A = Ls$$

adódik. □

4.20. Tétel *Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amely tartalmazza S-nek egy 0-minimális bal oldali ideálját. Akkor M az S félcsoport mindazon 0-minimális bal oldali ideáljainak uniója, amelyeket M részhalmazként tartalmaz.*

Bizonyítás. Jelölje A az S félcsoport M által tartalmazott összes 0-minimális bal oldali ideáljainak unióját. Azt kell bizonyítanunk, hogy $A = M$. Az világos, hogy A az S félcsoport bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy A az S félcsoport jobb oldali ideálja is. Legyenek $a \in A$ és $s \in S$ tetszőleges elemek. Az A definíciója miatt van S-nek olyan, az M által tartalmazott 0-minimális L bal oldali ideálja, hogy $a \in L$. A 4.19. Tétel miatt $Ls = \{0\}$ vagy Ls az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. Az is igaz, hogy

$$Ls \subseteq MS \subseteq M.$$

Így

$$Ls \subseteq A.$$

Következésképpen

$$as \in A.$$

Tehát A valóban jobb oldali ideálja az S félcsoportnak. Mivel a feltételek szerint M tartalmaz legalább egy 0-minimális bal oldali ideált, ezért

$$A \neq \{0\}.$$

Tehát A az S félcsoport legalább kételemű, M által tartalmazott ideálja. Mivel M az S félcsoport 0-minimális ideálja, ezért

$$A = M. \qquad \square$$

4.21. Tétel *Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül. Ha S-nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet M részhalmazként tartalmaz, akkor M minden bal oldali ideálja bal oldali ideálja S-nek is.*

Bizonyítás. Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül. A 4.15. Tétel miatt M egy 0-egyszerű félcsoport. Legyen a az M tetszőleges 0-tól különböző eleme. A 4.7. Tétel szerint

$$MaM \neq \{0\},$$

és így

$$Ma \neq \{0\}.$$

Tegyük fel hogy S-nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet M részhalmazként tartalmaz. A 4.20. Tétel szerint M előáll az S félcsoport M által tartalmazott 0-minimális bal oldali ideáljainak uniójaként. Legyen L tetszőleges nem nulla bal oldali ideálja M-nek. Legyen $a \in L \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. Akkor az előzőek szerint van S-nek olyan 0-minimális $L_0 \subseteq M$ bal oldali ideálja, melyre

$$a \in L_0 \setminus \{0\}$$

teljesül. Mivel $Ma \neq \{0\}$, ezért $Ma = L$, és így $a \in Ma$. Ez azt jelenti, hogy

$$L = \cup_{a \in L} Ma.$$

Így tetszőleges $s \in S$ elem esetén $sL \subseteq \cup_{a \in L} Ma = L$. Tehát L az S félcsoport bal oldali ideálja. □

4.3. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoport

4.22. Lemma *Legyen S tetszőleges félcsoport és A az S tetszőleges ideálja. Akkor*

$$\varrho_A = \{(a, b) \in S \times S : \ a = b \text{ vagy } a, b \in A\}$$

az S félcsoport kongruenciája.

Bizonyítás. Az világos, hogy ϱ az S félcsoport egy ekvivalenciarelációja. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az $(a, b) \in \varrho_A$ feltétellel. Akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $as = bs$ vagy $as, bs \in A$. Hasonlóan, $sa = sb$ vagy $sa, sb \in A$. Így ϱ_A az S félcsoport egy jobb-, illetve balkongruenciája. A 2.22. Tétel szerint ϱ_A az S félcsoport egy kongruenciája. □

4.23. Definíció *A ϱ_A kongruenciát az S félcsoport A ideálja szerinti Rees-féle kongruenciának nevezzük. A szerinte vett faktorfélcsoportot az S félcsoport A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoportjának nevezzük és S/A-val jelöljük.*

Egy $(S; \cdot)$ félcsoport A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoportjára úgy is tekinthetünk, mint egy olyan félcsoportra, amelynek az elemeit úgy is megkaphatjuk, hogy az $S \setminus A$ halmazhoz adjungálunk egy $0 \notin S \setminus A$ elemet, s az így kapott halmazon a következőképpen definiáljuk a műveletet: Tetszőleges $a, b \in (S \setminus A) \cup \{0\}$ elemekre

$$ab = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a, b, a \cdot b \in (S \setminus A) \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A továbbiakban, ha szükséges, egy S/A Rees-féle faktorfélcsoportra az előzőeknek megfelelő formában fogunk hivatkozni. Ezt tesszük már a következő tételekben is.

4.24. Tétel *Legyen J egy ideálja, T pedig egy részfélcsoportja egy S félcsoportnak. Akkor $J \cap T$ ieálja T-nek, $J \cup T$ részfélcsoportja S-nek, valamint*

$$(J \cup T)/J \cong T/(J \cap T).$$

Bizonyítás. Mivel
$$(J \cup T)^2 = J^2 \cup JT \cup TJ \cup T^2 \subseteq J \cup T,$$
ezért $J \cup T$ részfélcsoportja S-nek.

Legyenek $t \in T$ és $a \in J \cap T$ tetszőleges elemek. Akkor
$$ta, at \in T,$$
mivel T részfélcsoportja S-nek. Ugyanakkor
$$ta, at \in J,$$
mert $a \in J$ és J ideálja S-nek. Tehát
$$ta, at \in J \cap T,$$
és így $J \cap T$ ideálja T-nek. Ebből természetesen az is következik, hogy J ideálja $J \cup T$-nek. Így tekinthetjük a $(J \cup T)/J$ és a $T/(J \cap T)$ Rees faktorokat. Ezekre kapjuk, hogy
$$(J \cup T)/J = ((J \cup T) \setminus J) \cup 0 = (T \setminus J) \cup 0,$$
valamint
$$T/(J \cap T) = (T \setminus (J \cap T)) \cup 0' = (T \setminus J) \cup 0',$$
ahol 0, illetve $0'$ jelöli a faktorfélcsoportok nullelemeit a fenti sorrendnek megfelelően. □

4.25. Tétel *Legyen J egy S félcsoport tetszőleges ideálja. Jelölje θ az S félcsoportnak az S/J Rees-féle faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Akkor az $A \mapsto \theta(A) = A/J$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az S félcsoport J-t tartalmazó A ideáljai és az S/J faktorfélcsoport ideálja között, mégpedig úgy, hogy az S félcsoport tetszőleges, J-t tartalmazó A ideálja esetén*
$$(S/J)/(A/J) \cong S/A.$$

Bizonyítás. Tekintsük az S/J Rees-féle faktorfélcsoportot $(S \setminus J) \cup \{0\}$ formában. Akkor tetszőleges S-beli $A \supseteq J$ ideál esetén $\theta(A) = A/J = (A \setminus J) \cup \{0\}$. Mivel θ homomorfizmus, ezért $\theta(A)$ ideálja S/J-nek. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha Q tetszőleges ideálja az S/J Rees-féle faktorfélcsoportnak, akkor $A = \theta^{-1}(Q)$ az S félcsoport $J = \theta^{-1}(0)$-t tartalmazó ideálja, amelyre $\theta(A) = Q$ teljesül. Így θ szürjektív leképezése az S félcsoport J-t tartalmazó ideáljainak halmazáról az S/J Rees-féle faktorfélcsoport ideáljait tartalmazó halmazra. Megmutatjuk, hogy θ injektív is. Először is, ha A és B az S félcsoport J-t tartalmazó olyan ideáljai, amelyekre $A \subset B$ teljesül, akkor
$$A \setminus J \subset B \setminus J.$$

Így, ha mindkét halmazhoz ugyanazt a 0-elemet adjungáljuk, akkor az A/J Rees-féle faktorfélcsoport a B/J Rees-féle faktorfélcsoport valódi részfélcsoportjaként tekinthető. Ebből pedig már következik, hogy ha az S félcsoport valamely, J-t tartalmazó A és B ideáljaira $\theta(A) = \theta(B)$, azaz $A/J = B/J$ teljesül, akkor $A = B$. Tehát θ valóban injektív. Az S félcsoport J-t tartalmazó tetszőleges A ideálja esetén $(S/J)/(A/J) = ((S/J) \setminus (A/J)) \cup \{0\} = S \setminus A \cup \{0\} \cong S/A$. □

4.26. Következmény *Legyenek J és J' egy S félcsoport olyan ideáljai, amelyekre $J \subset J'$ teljesül. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy J maximális J'-ben (abban az értelemben, hogy nincs S-nek olyan K ideálja, amelyre $J \subset K \subset J'$ teljesülne) az, hogy J'/J 0-minimális ideálja az S/J Rees-féle faktorfélcsoportnak. Ebben az esetben J'/J vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoport.*

Bizonyítás. A 4.25. Tételt szerint J maximális J'-ben akkor és csak akkor, ha az S/J Rees-féle faktorfélcsoport J'/J nem tartalmazza S/J egyetlen ideálját sem valódi módon. Mivel S/J nullelemes és $J \neq J'$, ezért ezen utóbbi feltétel éppen azt jelenti, hogy J'/J az S/J faktorfélcsoport 0-minimális ideálja. A 4.15. Tétel szerint ekkor J'/J vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoport. □

4.27. Következmény *Egy S félcsoport valamely M ideálja akkor és csak akkor maximális (valódi) ideálja S-nek, ha az S/M Rees-féle faktorfélcsoportnak nincs valódi nem $\{0\}$ ideálja. Ebben az esetben S/M vagy 0-egyszerű, vagy egy kételemű zéró félcsoport.*

Bizonyítás. A 4.25. Tétel szerint kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a 0-elemes S/M Rees-féle faktorfélcsoport ideáljai és az S félcsoport M-et tartalmazó ideáljai között. Ennél a megfeleltetésnél S/M nulleleme az M ideálnak felel meg. Az M maximalitása miatt S/M-nek nincs a $\{0\}$-tól különböző ideálja. Ha $(S/M)^2 \neq \{0\}$, akkor az S/M félcsoport 0-egyszerű. Ha $(S/M)^2 = \{0\}$, akkor S/M minden 0-t tartalmazó részhalmaza ideál, s így S/M egy kételemű zéró félcsoport. □

4.4. Félcsoport főfaktorai

4.28. Definíció *Az S félcsoport valamely nem üres A részhalmazát tartalmazó bal oldali ideálok metszetét az A által generált bal oldali ideálnak nevezzük. Ha $A = \{a\}$, akkor az a elem által generált fő balideálról beszélünk, amelyet $L(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $L(a) = a \cup Sa = S^1a$. Ennek duálisa az a elem által generált fő jobbideál , amelyet $R(a)$-val jelölünk. Világos, hogy $R(a) = a \cup aS = aS^1$. Az a elem által generált főideált $J(a)$-val jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy $J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS = S^1aS^1$.*

4.29. Megjegyzés *Egy S félcsoport tetszőleges a eleme esetén, azon S-beli elemek, amelyek ugyanazt a főideált generálják, mint az a elem, $J(a)$-nak egy nem üres részhalmazát alkotják; ezt a részhalmazt J_a-val fogjuk jelölni. A $J(a) \setminus J_a$ halmazt $I(a)$-val jelöljük.*

4.30. Tétel *Tetszőleges S félcsoport bármely a eleme esetén $I(a)$ vagy üres vagy az S félcsoport ideálja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I(a)$ nem üres egy S félcsoport valamely a eleme esetén. Legyenek $s \in S$ és $b \in I(a)$ tetszőleges elemek. Ha az $bs \in J(a)$ szorzat nem lenne $I(a)$-ban, akkor $bs \in J_a$ teljesülne, azaz fennálna a $J(a) = J(bs)$ egyenlőség. Mivel $J(bs) \subseteq J(b)$, ezért a $J(a) \subseteq J(b)$ tartalmazást kapnánk eredményül. Mivel $b \in J(a)$, ezért $J(b) \subseteq J(a)$. A két tartalmazásból $J(a) = J(b)$ és így $b \in J_a$ következik, ami ellentmond a $b \in I(a) = J(a) \setminus J_a$ tartalmazásnak. Így $bs \in I(a)$. Hasonlóan igazolható, hogy $sb \in I(a)$, tehát $I(a)$ ideálja S-nek. □

4.31. Definíció *Egy S félcsoport főfaktorain a $J(a)/I(a)$ Rees-féle faktorfélcsoportokat értjük. Abban az esetben, ha $I(a) = \emptyset$, akkor a $J(a)/I(a)$ főfaktoron $J(a)$-val izomorf félcsoportot értünk.*

4.32. Tétel *Tetszőleges félcsoport tetszőleges főfaktora egyszerű félcsoport, vagy 0-egyszerű félcsoport, vagy egy zéró félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoport és $a \in S$ egy tetszőleges elem. Ha $I(a) = \emptyset$, akkor $J(a)$ az S félcsoport minimális ideálja. Akkor viszont a 4.11. Tétel miatt $J(a) \cong J(a)/I(a)$ egyszerű félcsoport. Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor $I(a) \neq \emptyset$. Mivel $I(a)$ maximális ideál $J(a)$-ban, ezért a 4.26. Tétel szerint $J(a)/I(a)$ vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoport. □

4.33. Definíció *Egy S félcsoportot féligegyszerű félcsoportnak nevezünk, ha minden főfaktora vagy egyszerű, vagy 0-egyszerű.*

4.34. Definíció *Egy S félcsoport fősorozatán az S ideáljainak olyan*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

véges sorozatát értjük (itt az üreshalmazt is ideálnak tekintjük), amely S-sel kezdődik, az üres halmazzal végződik, és tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ index esetén sem adható meg S-nek olyan J ideálja, amelyre $S_i \supset J \supset S_{i+1}$ teljesülne (azaz a sorozat nem finomítható). A fenti fősorozat faktorain az S_i/S_{i+1} $(i = 1, \ldots, m)$ Rees-féle faktorfélcsoportokat értjük (az S_m/S_{m+1} faktor izomorf S_m-mel).

4.35. Megjegyzés *A Tétel miatt, ha*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

egy S félcsoport fősorozata, akkor tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ index esetén az S_i/S_{i+1} Rees-féle faktorfélcsoport vagy egy 0-egyszerű félcsoport ($i = m$ esetén egyszerű) vagy egy zéró félcsoport.

4.36. Tétel *Legyen S olyan félcsoport, amelynek van egy*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

fősorozata. Akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik a fősorozat faktorai és az S félcsoport főfaktorai között, mégpedig úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett félcsoportok egymással izomorfak. Speciálisan, az S bármely két fősorozata egymással izomorf, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorok egymással izomorfak. Az S azon ideálja, amely a fősorozat utolsó nem üres eleme, az S félcsoport magja.

Bizonyítás. Tekintsük a fősorozat tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ indexhez tartozó S_i/S_{i+1} faktorát. Legyen $a \in S_i/S_{i+1}$ tetszőleges. Az világos, hogy $J(a) \cup S_{i+1}$ az S félcsoport olyan ideálja, amelyre $S_i \supseteq J(a) \cup S_{i+1} \supset S_{i+1}$ teljesül. Mivel S_i és S_{i+1} egy fősorozat egymás melletti elemei, ezért ebből a tartalmazásból

$$J(a) \cup S_{i+1} = S_i$$

következik.

Legyen $b \in I(a)$ tetszőleges. Akkor

$$b \in S_{i+1}.$$

Ellenkező esetben azt kapnánk, hogy $J(b) \cup S_{i+1} = S_i$, amiből $a \in J(b)$ következne, ellentmondva a $b \in I(a)$ feltételnek. Így tehát minden $b \in I(a)$ elemre $b \in S_{i+1}$ teljesül, s ezért

$$I(a) \subseteq S_{i+1}.$$

Másrészről viszont, ha $c \in J(a) \cap S_{i+1}$, akkor

$$J(c) \subseteq S_{i+1}$$

, ezért

$$J(c) \neq J(a),$$

ami azt eredményezi, hogy

$$c \in I(a).$$

Ez, és közvetlenül az előzőekben bizonyított $I(a) \subseteq S_{i+1}$ tartalmazás azt eredményezi, hogy

$$I(a) = J(a) \cap S_{i+1}.$$

A 4.24. Tétel szerint

$$J(a)/(J(a) \cap S_{i+1}) \cong (J(a) \cup S_{i+1})/S_{i+1}.$$

A bal oldali faktérfélcsoport izomorf a $J(a)/I(a)$ Rees-féle faktorfélcsoporttal, a jobb oldali pedig az S_i/S_{i+1} Rees-féle faktorfélcsoporttal. Tehát, a廓sorozat S_i/S_{i+1} faktora izomorf a $J(a)/I(a)$ főfaktorral.

Továbbá,

$$J_a = J(a) \setminus I(a) = (J(a) \cup S_{i+1}) \setminus (i(a) \cup S_{i+1}) = Si \setminus S_{i+1}.$$

Ezért, ha $a' \in S_i \setminus_{i+1}$, akkor $J(a') = J(a)$. Tehát az S_i/S_{i+1}-hez tartozó $J(a)/I(a)$ főfaktor nem függ attól, hogy az a elemet hogyan választjuk $S_i \setminus S_{i+1}$-ből. Mésrészt, ha a az S félcsoport tetszőleges eleme, akkor van olyan $i \in \{1, \ldots, m\}$ index, hogy $a \in S_i \setminus S_{i+1}$. Így az

$$S_i/S_{i+1} \mapsto J(a)/I(a)$$

kölcsönösen egyértelmű leképezése a fősorozat faktorai halmazának az S félcsoport főfaktorai halamzára. Ebből az is következik, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorok egymással izomorfak. Mivel a fősorozat utolsó nem üres eleme nem tartalmazza S egyetlen ideálját sem valódi módon, ezért ez az elem az S félcsoport magja. $\square$

4.5. A Green-féle $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-, $\mathcal{D}$-relációk

Tetszőleges S félcsoporton definiáljuk a következő relációkat. Azt mondjuk, hogy S valamely a és b elemei $\mathcal{L}$-relációban [$\mathcal{R}$-relációban] állnak, ha az általuk generált fő balideálok [fő jobbideálok] megegyeznek, azaz, $S^1a = S^1b$ [$aS^1 = bS^1$]. Az világos, hogy $\mathcal{L}$ az S félcsoport egy jobbkongruenciája, $\mathcal{R}$ pedig az S egy balkongruenciája. Az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációk metszetét $\mathcal{H}$-val jelöljük.

4.37. Lemma *Tetszőleges S félcsoport esetén $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ teljesül egy S félcsoport valamely a és b elemeire. Akkor $(a, c) \in \mathcal{L}$ és $(c, b) \in \mathcal{R}$ teljesül S valamely c elemére, azaz, megadhatók olyan $u, v \in S^1$ elemek, hogy $a = uc$ és $b = cv$. Legyen $d = av = ucv = ub$. Mivel $\mathcal{L}$ jobb kongruencia, ezért $(a, c) \in \mathcal{L}$-ből $(av, cv) \in \mathcal{L}$, azaz, $(d, b) \in \mathcal{L}$ következik. Mivel $\mathcal{R}$ bal kongruencia, ezért $(c, b) \in \mathcal{R}$-ből $(uc, ub) \in \mathcal{R}$, azaz, $(a, d) \in \mathcal{R}$ következik. Így $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Tehát $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. A fordított tartalmazás hasonlóan bizonyítható. $\square$

Az $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ ekvivalenciarelációt $\mathcal{D}$-vel fogjuk jelölni. Egy S félcsoport tetszőleges a eleme esetén L_a, R_a, H_a, illetve D_a fogja jelölni az S-en értelmezett $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-, illetve $\mathcal{D}$-reláció azon osztályát, amely az a elemet tartalmazza.

4.38. Tétel *(Green-tétel) Legyenek a és b egy S félcsoport $\mathcal{R}$-ekvivalens elemei úgy, hogy $b = as$ és $a = bs'$. Akkor a $\sigma : x \mapsto xs$ $(x \in L_a)$ az L_a-nak L_b-re, $\sigma' : y \mapsto ys$,*

$(y \in L_b)$ pedig L_b-nek L_a-ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés $\mathcal{R}$-osztály tartó, azaz $(x, x\sigma) \in \mathcal{R}$ és $(y, y\sigma') \in \mathcal{R}$ teljesül minden $x \in L_a$ és $y \in L_b$ elemre.

Bizonyítás. Legyen $x \in L_a$ tetszőleges. Mivel $\mathcal{L}$ jobb kongruencia S-en, ezért $(x, a) \in \mathcal{L}$-ből

$$(xs, b) \in \mathcal{L}$$

következik, és így

$$xs \in L_b.$$

Tehát σ az L_a részhalmazt az L_b részhalmazba képezi. Hasonlóan bizonyítható, hogy σ' az L_b részhalmazt az L_a részhalmazba képezi.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $\sigma\sigma'$ identikus leképezés L_a-n, tekintsünk egy tetszőleges $x \in L_a$ elemet. Ehhez az elemhez megadható olyan $t \in S^1$ elem, amely eleget tesz az

$$x = ta$$

egyenlőségnek. Ekkor viszont

$$(x)\sigma\sigma' = xss' = tass' = tbs' = ta = x,$$

azaz $\sigma\sigma'$ identikus leképezés az L_a részhalmazon.

Hasonlóan igazolható, hogy $\sigma'\sigma$ identikus leképezés az L_b részhalmazon. Igy tehát σ az L_a-nak L_b-re, σ' pedig L_b-nek L_a-ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei.

Mivel tetszőleges $x \in L_a$ elem esetén

$$(x)\sigma = xs$$

és (a fentiek szerint)

$$x = (x)\sigma s',$$

ezért

$$(x, (x)\sigma) \in \mathcal{R}.$$

Tehát σ $\mathcal{R}$-osztály tartó. Hasonlóan igazolható, hogy σ' is $\mathcal{R}$-osztály tartó. □

4.39. Tétel *Legyenek a és c egy S félcsoport $\mathcal{D}$-ekvivalens elemei. Ha b az S olyan eleme, amelyre $(a, b) \in \mathcal{R}$ és $(b, c) \in \mathcal{L}$, továbbá $as = b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ $(s, s', t, t' \in S^1)$, akkor az $x \mapsto txs$ $(x \in H_a)$ és $z \mapsto t'zs'$ $(z \in H_c)$ leképezések H_a és H_c közötti olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei. Ebből következően, az ugyanazon $\mathcal{D}$-osztályban lévő $\mathcal{H}$-osztályok számossága egymással megegyezik.*

Bizonyítás. A 4.38. Tétel duálisa szerint a $\tau : y \mapsto ty$ $(y \in R_b)$ az R_b-nak R_c-re, $\tau' : z \mapsto t'z$ $(z \in R_c)$ pedig R_c-nek R_b-re való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés $\mathcal{L}$-osztály tartó.

Legyenek σ, illetve σ' a Green-tételben szereplő leképezések, de itt σ-nak a H_a-ra, illetve σ'-nek H_b-re való leszűkítéseit tekintsük. Mivel az eredeti leképezések a Green-tétel szerint $\mathcal{R}$-osztálytartók, ezért σ leszűkítése H_a-nak H_b-re, a σ' leszűkítése pedig H_b-nek H_a-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Hasonlóan, legyenek τ, illetve τ' a bizonyítás előző részépen szereplő leképezések, de azoknak is csak a H_b-re, illetve H_c-re való leszűkítéseit tekintsük. Mivel mindketten $\mathcal{L}$-osztálytartók a Green-tétel duálisa szerint, ezért τ leszűkítése H_b-t H_c-re, a τ' leszűkítése pedig H_c-t H_b-re képezi le kölcsönösen egyértelmű módon. Így $\sigma\tau$ a H_a-nak H_c-re, a $\tau'\sigma'$ pedig a H_c-nek H_a-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amelyek ráadásul egymás inverzei. Ezzel igazoltuk a tétel állítását. □

4.40. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha L jelöli S egy tetszőleges $\mathcal{L}$-osztályát, R pedig egy tetszőleges $\mathcal{R}$-osztályát, akkor az LR szorzat minden eleme S egy $\mathcal{D}$-osztályában van.*

Bizonyítás. Legyenek a, b, a', b' az S félcsoport olyan elemei, melyekre $a, a' \in L$ és $b, b' \in R$ teljesül. Mivel $\mathcal{L}$ jobb kongruencia, ezért

$$ab, a'b \in L.$$

Mivel $\mathcal{R}$ bal kongruencia, ezért

$$a'b, a'b' \in R.$$

Következésképpen

$$ab \;\mathcal{L}\; a'b \;\mathcal{R}\; a'b',$$

azaz

$$ab \;\mathcal{D}\; a'b'.$$

Így az LR szorzat minden eleme egy $\mathcal{D}$-osztályban van. □

4.41. Lemma *Ha L egy 0-elemes S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja, akkor $L \setminus \{0\}$ egy $\mathcal{L}$-osztálya S-nek.*

Bizonyítás. Legyen $a \in L \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. Akkor vagy

$$Sa = L$$

vagy

$$Sa = \{0\}.$$

Ha $Sa = L$ teljesül minden $a \in L \setminus \{0\}$ elemre, akkor

$$S^1 a = S^1 b$$

teljesül minden $a, b \in L \setminus \{0\}$ elemre, és így

$$L \setminus \{0\} \subseteq L_a.$$

Ha $c \in L_a$, akkor

$$c \in S^1 a = L,$$

és így

$$L_a \subseteq L \setminus \{0\}.$$

Tehát

$$L \setminus \{0\} = L_a.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $Sa = \{0\}$ valamely $a \in L \setminus \{0\}$ elemre. Akkor $\{0, a\}$ az S félcsoport L által tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ezért

$$L = \{0, a\} = S^1 a,$$

amiből következik, hogy $S^1 x = S^1 a$ akkor és csak akkor teljesül valamely $x \in S$ elemre, ha $x = a$. Tehát

$$L_a = \{a\} = L \setminus \{0\}.$$

□

4.42. Tétel *Egy S félcsoport tetszőleges e idempotens eleme jobb oldali egységeleme L_e-nek, bal oldali egységeleme R_e-nek és kétoldali egységeleme H_e-nek.*

Bizonyítás. Ha $a \in L_e$, akkor $a \in Se$ és így $ae = a$. Hasonlóan, ha $a \in R_e$, akkor $ea = a$. Mivel $H_e = R_e \cap L_e$, ezért $ae = ea = a$ szükségképpen teljesül minden $a \in H_e$ elemre az előzőek miatt. □

4.43. Tétel *Tetszőleges félcsoport minden $\mathcal{H}$-osztálya legfeljebb egy idempotens elemet tartalmaz.*

Bizonyítás. A tétel állítása a 4.42. Tételt nyilvánvaló következménye. □

4.44. Lemma *Legyen H egy S félcsoport tetszőleges $\mathcal{H}$-osztálya. Ha valamely $h \in H$ és $s \in S$ elem esetén $hs \in H$, akkor $Hs = H$. Hasonlóan, ha $sh \in H$, akkor $sH = H$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $hs \in H$ valamely $h \in H$ és $s \in S$ elemekre. Akkor

$$(hs, h) \in \mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R},$$

és ezért

$$H = H_h = H_{hs},$$

valamint

$$R_h = R_{hs}, \quad L_h = L_{hs}.$$

Mivel $h \ \mathcal{R} \ hs$, ezért a 4.38. Tétel miatt

$$x \mapsto xs$$

L_h-nak $L_{hs} = L_h$-ra való kölcsönösen egyértelmű $\mathcal{R}$-osztály tartó leképezése. Ez utóbbiból következik, hogy a vizsgált leképezés H-nak H-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, s ezért

$$Hs = H.$$

A 4.38. Tétel duálisának felhasználásával hasonlóan bizonyítható, hogy ha $sh \in H$-ból következik az $sH = H$ egyenlőség. □

4.45. Tétel *Ha egy S félcsoport három eleme, a, b, ab az S ugyanazon $\mathcal{H}$-osztályában vannak, akkor ez a $\mathcal{H}$-osztály az S félcsoport egy részcsoportja. Speciálisan, az idempotens elemeket tartalmazó $\mathcal{H}$-osztályok mindegyike részcsoportja S-nek.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy S félcsoport olyan elemei, amelyekre $a, b, ab \in H$ teljesül, ahol H az S egy $\mathcal{H}$-osztályát jelöli. A 4.44. Lemma szerint $Hb = H$. Legyenek $c, d \in H$ tetszőleges elemek. Akkor

$$cb \in Hb = H.$$

Mivel $c, cb \in H$, ezért a 4.44. Lemma szerint $cH = H$. Így $cd \in H$. Újból alkalmazva a 4.44. Lemmát, azt kapjuk, hogy $Hd = H$. Tehát H tetszőleges c és d elemei esetén

$$cH = Hd = H,$$

amiből az 1.25. Tétel szerint már következik, hogy H az S félcsoport egy részcsoportja. □

4.46. Tétel *Egy S félcsoport tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in R_a \cap L_b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet. Ha ez a helyzet, akkor $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $ab \in R_a \cap L_b$ teljesül valamely $a, b \in S$ elemekre. Az $ab \in R_a$ tartalmazásból az következik, hogy van S-nek olyan b' eleme, hogy

$$(ab)b' = a.$$

Ebből viszont a 4.38. Tétel szerint az adódik, hogy

$$\sigma :\ x\ \mapsto\ xb\ (x \in L_a)$$

L_a-nak L_{ab}-re,

$$\sigma' :\ y\ \mapsto\ yb'$$

pedig L_{ab}-nek L_a-ra való olyan kölcsönösen egyértelmű $\mathcal{R}$-osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei. A kiinduló feltétel miatt $ab \in L_b$, s ezért $L_{ab} = L_b$. Ebből viszont az következik, hogy σ' a $b \in L_b$ elemet a $bb' \in L_a$ elembe viszi. A σ' leképezés $\mathcal{R}$-osztály tartó tulajdonsága miatt az is igaz, hogy $bb' \in R_b$. Így

$$bb' \in R_b \cap L_a.$$

Ebből viszont

$$(bb')^2 = (bb')(bb') = ((bb')\sigma)\sigma' = (bb')(\sigma \circ \sigma') = (bb')id_{L_a} = bb'$$

adódik, azaz bb' az $R_b \cap L_a$ egy idempotens eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy e idempotens elemet. A 4.42. Tétel szerint e az R_b-ben bal oldali egységelem, s ezért

$$eb = b.$$

Mivel $e\ \mathcal{R}\ b$ (és $eb = b$), ezért a 4.38. Tétel szerint

$$\sigma :\ x\ \mapsto\ xb\ (x \in L_e)$$

L_e-nek L_b-re való $\mathcal{R}$-osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezése. Mivel $a \in L_e$, ezért

$$ab \in L_b.$$

Mivel σ $\mathcal{R}$-osztály tartó, ezért

$$ab \in R_a.$$

Így

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

Eddig tehát beláttuk, hogy egy S félcsoport tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in R_a \cap L_b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet.

A bizonyítás teljessé tételéhez meg kell még mutatni, hogy ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$ egyenlőségek teljesülnek.

Tegyük fel tehát, hogy valamely $a, b \in S$ elemek esetén $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy e idempotens elemet. Legyenek $x \in H_a$ és $y \in H_b$ tetszőleges elemek. Akkor

$$e \in R_y \cap L_x,$$

amiből - a fenti két feltétel ekvivalenciáját is használva - következik, hogy

$$xy \in R_x \cap L_y = R_a \cap L_b.$$

Mivel x, illetve y tetszőleges H_a-, illetve H_b-beli elemek, ezért

$$H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b.$$

Mivel $L_e = L_a$ és $L_b = L_{ab}$, ezért

$$\sigma : \ x \ \mapsto \ xb \ (x \in L_a)$$

L_a-nak L_{ab}-re való $\mathcal{R}$-osztály tartó leképezése, s ezért az is igaz, hogy σ H_a-t H_{ab}-re képezi le, s ezért $H_a b = H_{ab}$. Tehát

$$H_a b \subseteq H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{ab} = H_a b,$$

s ezért

$$H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $aH_b = H_{ab}$. Így valóban teljesülnek a tételben szereplő $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$ egyenlőségek. $\square$

Legyen D egy félcsoport tetszőleges $\mathcal{D}$-osztálya. Jelöljön 0 egy olyan szimbólumot, amely nem eleme D-nek. Legyen $T = D \cup \{0\}$. A T halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Tetszőleges $a, b \in D$ elemek esetén legyen

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \in R_a \cap L_b, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

továbbá legyen

$$a * 0 = 0 * a = 0 * 0 = 0.$$

4.47. Lemma $(T; *)$ *egy félcsoport.*

Bizonyítás. A $*$ művelet asszociativitásának igazolásához tekintsünk tetszőleges $a, b, c \in T$ elemeket. Ha ezek közül mindkettő nulla, akkor

$$(a * b) * c = 0 = a * (b * c).$$

Tegyük fel, hogy valamelyikük nem nulla. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$a * (b * c) \neq 0.$$

Ekkor

$$b * c \neq 0,$$

ami a $*$ művelet definíciója miatt a

$$b * c = bc \in R_b \cap L_c$$

teljesülését jelenti. Emiatt

$$R_{bc} = R_b \quad \text{és} \quad L_{bc} = L_c.$$

Mivel a

$$0 \neq a * (b * c) = a * (bc)$$

feltétel teljesül, ezért

$$a * (bc) = a(bc) \in R_a \cap L_{bc},$$

és így

$$R_{bc} \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel a fentiek szerint $R_{bc} = R_b$, ezért

$$R_b \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. A 4.46. Tétel miatt ez ekvivalens az

$$ab \in R_a \cap L_b$$

feltétellel. Ebből egyrészt

$$R_{ab} = R_a,$$

másrészt

$$a * b = ab \neq 0$$

adódik. Ha ezek mellett feltesszük, hogy

$$(ab) * c = (a * b) * c = 0,$$

akkor ebből a feltételből

$$a(bc) = (ab)c \notin R_{ab} \cap L_c = R_a \cap L_{bc}$$

adódik, amiből a 4.46. Tétel miatt az következik, hogy

$$R_{bc} \cap L_a$$

nem tartalmaz idempotens elemet. Ez ellentmondás, hiszen korábban éppen ennek az ellenkezőjét kaptuk. Így szükségképpen

$$(a * b) * c \neq 0.$$

Ekkor persze

$$(ab) * c \neq 0 \quad \text{és} \quad a * b \neq 0,$$

és ezért

$$a * (b * c) = a(bc) = (ab)c = (a * b) * c.$$

Nem részletezzük, de az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy ha

$$(a * b) * c \neq 0,$$

akkor

$$a * (b * c) \neq 0$$

és

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ezzel beláttuk, hogy a $*$ művelet asszociatív a $T = D \cup \{0\}$ halmazon, azaz $(T; *)$ félcsoport. □

Feladatok

4.1. Feladat *(Megoldás: 17.12.) Egy* 0*-elemes félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges a eleméhez megadható olyan n pozitív egész szám, hogy $a^n = 0$. Mutassuk meg, hogy nincs* 0*-egyszerű nil félcsoport.*

4.2. Feladat *(Megoldás: 17.13.) Egy S félcsoportot $\mathcal{R}$-kommutatívnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $ab \in baS^1$ teljesül. Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport akkor és csak akkor $\mathcal{R}$-kommutatív, ha S Green-féle $\mathcal{R}$ ekvivalenciája kommutatív kongruencia!*

5. fejezet

Félcsoportok ideálbővítése

5.1. Definíció *Legyen A tetszőleges, Q pedig nullelemes (de egyébként tetszőleges) félcsoport. Az S félcsoportot az A félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett ideálbővítésének (röviden bővítésének) nevezzük, ha S tartalmaz olyan, az A-val izomorf B ideált, hogy az S/B Rees-féle faktorfélcsoport izomorf Q-val.*

5.2. Megjegyzés *Megjegyezzük, hogy a továbbiakban A-t mindig azonosítjuk B-vel. Feltehetjük, hogy $A \cap Q = \emptyset$. Ekkor $S = A \cup Q^*$ formában is tekinthető, ahol Q^* jelöli a $Q \setminus \{0\}$ halmazt. Tehát, ha arra a kérdésre akarunk választ kapni, hogy van-e olyan S félcsoport, amely egy A félcsoportnak egy nullelemes Q félcsoporttal való ideálbővítése, akkor azt is kérdezhetjük, hogy lehet-e az $S = A \cup Q^*$ halmazon olyan $\circ$ associatív műveletet értelmezni, melynek A-ra való leszűkítése megyegyezik az eredeti A-beli művelettel, továbbá A az $(S, \circ)$ félcsoportnak olyan ideálja, hogy az S/A Rees-féle faktorfélcsoport izomorf Q-val.*

5.1. Ideálbővítés, parciális transzformációk

5.3. Definíció *Nem üres S halmaz esetén az $S \times S$ halmaz valamely nem üres részhalmazának S-be való egyértelmű leképezését az S halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halamazt parciális gruppoidnak nevezünk.*

5.4. Definíció *Egy S parciális gruppoidnak egy S' parciális gruppoidba való θ leképezését parciális homomorfizmusnak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az alábbiak teljesülnek: ha az ab szorzat értelmezve van S-ben, akkor a $\theta(a)\theta(b)$ szorzat értelmezve van S'-ben és $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.*

5.5. Tétel *Legyen $(A; \cdot)$ tetszőleges, $(Q; *)$ pedig nullelemes félcsoport. Legyen θ a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa. Legyen*

$S = A \cup (Q \setminus \{0\})$. Az S-en értelmezzünk egy $\circ$ műveletet a következőképpen: Tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q$ elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \theta(x)\theta(y), & \text{ha } x * y = 0 \text{ } Q\text{-ban;} \end{cases} \tag{5.1}$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \tag{5.2}$$

$$x \circ a = \theta(x) \cdot a; \tag{5.3}$$

$$a \circ b = a \cdot b. \tag{5.4}$$

Akkor $(S; \circ)$ félcsoport, amely A-nak Q-val való bővítése. Ha A egységelemes félcsoport, akkor A-nak Q-val való minden bővítése a fenti módon (azaz parciális homomorfizmusokkal) konstruálható.

Bizonyítás. A tétel állításának első részéhez tulajdonképpen csak azt kell bizonyítani, hogy a tételben definiált művelet asszociatív. Ez a bizonyítás technikai jellegű. Nyolc eset van, amelyeket AAA, AAQ^*, ... módon fogunk jelölni attól függően, hogy a háromtényezős szorzatban szereplő elemek hol helyezkednek el. Például az AAQ^* esetnél az első két tényező A-beli, a harmadik tényező pedig Q^*-beli elem. A következőkben jelöljenek a, b és c tetszőleges A-beli, x,y és z pedig tetszőleges Q^*-beli elemeket.

AAA eset: Itt tulajdonképpen nincs is mit bizonyítanunk, mert az A beli elemek közötti $\circ$ művelet megegyezik az A-beli eredeti $\cdot$ művelettel, amely viszont asszociatív.

AAQ^* eset:

$$(a \circ b) \circ x = (a \cdot b) \circ x = (a \cdot b) \cdot \theta(x) = a \cdot (b \cdot \theta(x)) =$$

$$= a \cdot (b \circ x) = a \circ (b \circ x).$$

Az AQ^*A, Q^*AA és Q^*AQ^* esetek vizsgálata az AAQ^* esethez hasonló.

AQ^*Q^* eset:

$$(a \circ x) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \cdot \theta(y) = a \cdot (\theta(x)\theta(y)).$$

Ha $x * y = 0$, akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (x \circ y) = a \circ (x \circ y).$$

Ha $x * y \neq 0$, akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (\theta(xy)) = a \circ (x * y) = a \circ (x \circ y).$$

A Q^*Q^*A eset vizsgálata az előző esethez hasonló.

$Q^*Q^*Q^*$ eset: Ha $x * y * z \neq 0$, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) * z = x * (y * z) = x \circ (y \circ z).$$

Ezért vizsgálhatjuk az $x * y * z = 0$ esetet.

Ha $x * y \neq 0$ Q-ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) \circ z = (\theta(x * y) \cdot \theta(z) = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha $x * y = 0$ Q-ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (\theta(x)\theta(y)) \circ z = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha $y * z \neq 0$ Q-ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y * z) = \theta(x) \cdot \theta(y * z) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

Ha $y * z = 0$ Q-ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (\theta(y) \cdot \theta(z)) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

A fenti négy eset eredményeinek figyelembevételével a $\circ$ művelet asszociativitása a $Q^*Q^*Q^*$ esetben is teljesül. Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk.

A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy $(S; \circ)$ olyan félcsoport, amely előáll egy egységelemes $(A; \cdot)$ félcsoportnak egy nullelemes $(Q; *)$ félcsoporttal való ideálbővítéseként. A korábbi megjegyzés szerint, feltehetjük, hogy A az S félcsoport egy ideálja és tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén $a \cdot b = a \circ b$. Megmutatjuk, hogy megadható a Q^* parciális félcsoportnak az A félcsoportba olyan θ parciális homomorfizmusa, hogy tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q$ elemek esetén a tételbeli

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \\ \theta(x) \cdot \theta(y), & \text{ha } x * y = 0, \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \quad x \circ a = \theta(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b$$

egyenlőségek teljesülnek, azaz az S-en értelmezett $\circ$ művelet a θ parciális homomorfizmus által van meghatározva.

Legyen $x \in Q \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. e-vel jelölve A egységelemét,

$$x \circ e = e \circ (x \circ e) = (e \circ x) \circ e = e \circ x.$$

Legyen θ a $(Q\setminus\{0\}; *)$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való következő leképezése:

$$\theta \ : \ x \ \mapsto x \circ e.$$

Megmutatjuk, hogy θ parciális homomorfizmus. Tegyük fel, hogy x és y a $Q \setminus \{0\}$ olyan elemei, amelyekre $x * y \neq 0$ teljesül. Akkor

$$x \circ y = x * y,$$

és ezért

$$\theta(x)\cdot\theta(y) = (x\circ e)\cdot(y\circ e) = (x\circ e)\circ(y\circ e) = x\circ(e\circ(y\circ e)) = x\circ(y\circ e) = (x*y)\circ e = \theta(x*y).$$

Ez éppen azt igazolja, hogy θ a $(Q\setminus\{0\};*)$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa.

A továbbiakban legyenek $a, b \in A$ és $x, y \in Q \setminus \{0\}$ tetszőleges elemek. Ha $x * y \neq 0$, akkor $x \circ y \notin A$ teljesül S-ben, és így

$$x \circ y = x \circ y.$$

Ha $x * y = 0$, akkor $x \circ b \in A$. Így

$$x\circ y = (x\circ y)\circ e = x\circ(y\circ e) = x\circ(e\circ(y\circ e)) = (x\circ e)\circ(y\circ e) = \theta(x)\circ\theta(y) = \theta(x)\cdot\theta(y).$$

Továbbá, tetszőleges $x \in Q^*$-ra

$$a \circ x = (a \circ e) \circ x = a \circ (e \circ x) = a \circ \theta(x) = a \cdot \theta(x),$$
$$x \circ a = x \circ (e \circ a) = (x \circ e) \circ a = \theta(x) \circ a = \theta(x) \cdot a,$$
$$a \circ b = a \cdot b.$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy az S en értelmezett $\circ$ művelet a

$$\theta \ : \ x \ \mapsto x \circ e$$

parciális homomorfizmus által van meghatározva. □

5.2. Félcsoportok transzlációs burka

Egy X halmaz önmagába való egyértelmű leképezését az X halmaz egy *transzformációjának* nevezzük. Jelölje $\mathcal{T}_X$ az X összes transzformációinak halmazát. A $\mathcal{T}_X$ halmazon kétféleképpen is értelmezhetünk egy $\circ$ műveletet. Ha $\mathcal{T}_X$ elemeit úgy tekintjük, mint balról ható transzformációk, akkor tetszőleges $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in \mathcal{T}_X$ transzformációk esetén legyen $\alpha \circ \beta$ a $\mathcal{T}_X$ azon eleme, amelyre tetszőleges $x \in X$ elem esetén $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ teljesül. Viszont, ha $\mathcal{T}_X$ elemeit úgy tekintjük, mint jobbról ható transzformációk, akkor tetszőleges $(\cdot)\alpha, (\cdot)\beta \in \mathcal{T}_X$ transzformációk esetén legyen $\alpha \circ \beta$ a $\mathcal{T}_X$ azon eleme amelyre tetszőleges $x \in X$ elem esetén $(x)(\alpha \circ \beta) = ((x)\alpha)\beta$ teljesül. Mindkét esetben $\mathcal{T}_X$ félcsoportot alkot a megfelelő műveletre nézve; ezeket a félcsoportokat az X halmaz feletti *teljes bal transzformációfélcsoport*nak, illetve *teljes jobb transzformációfélcsoport*nak nevezzük. A következőkben egy S félcsoport speciális bal, illetve jobb transzformációival foglalkozunk.

5.6. Definíció *Egy S félcsoport (balról ható) $\lambda(\cdot)$ transzformációját bal transzlációnak nevezzük, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $\lambda(xy) = \lambda(x)y$. Az S félcsoport (jobbról ható) $(\cdot)\varrho$ transzformációját jobb transzlációnak nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in S$ elemek esetén $(xy)\varrho = x(y)\varrho$ teljesül. Azt mondjuk, hogy egy λ bal transzláció és egy ϱ jobb transzláció láncszemet alkotnak, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $x\lambda(y) = (x)\varrho y$ teljesül.*

5.7. Lemma *Egy S félcsoport bal [jobb] transzlációinak Λ [P] halmaza a $\mathcal{T}_S$ bal [jobb] transzformációfélcsoport egy részfélcsoportja.*

Bizonyítás. A bal oldali esettel foglalkozunk. A jobb oldali eset hasonlóan igazolható. Ha $x, y \in S$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tetszőlegesek, akkor

$$(\lambda_1\lambda_2)(xy) = \lambda_1(\lambda_2(xy)) = \lambda_1((\lambda_2(x)y) = \lambda_1(\lambda_2(x))y = ((\lambda_1\lambda_2)(x))y. \qquad \square$$

Egy S félcsoport tetszőleges a eleme esetén jelölje λ_a [ϱ_a] az S félcsoportnak azon transzformációját, amelyre tetszőleges $s \in S$ elem esetén $\lambda_a(s) = as$ [$(s)\varrho_a = sa$] teljesül. Könnyen ellenőrizhető, hogy λ_a [ϱ_a] az S félcsoport bal [jobb] transzlációja. λ_a-t [ϱ_a-t] az S félcsoport (a eleme álta definiált) *belső bal [jobb] transzlációjának* nevezzük. Az $x(ay) = (xa)y$ egyenlőség miatt λ_a és ϱ_a lámcszemet alkotnak.

Jelölje Λ_0, illetve P_0 egy S félcsoport belső bal, illetve belső jobb transzlációinak halmazát.

5.8. Lemma *Tetszőleges S félcsoport esetén az $a \mapsto \lambda_a$, illetve az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetések ($a \in S$) az S félcsoportnak Λ_0-ra, illetve P_0-ra való homomorfizmusai.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $s, a, b \in S$ elemek esetén

$$\lambda_{ab}(s) = (ab)s = a(bs) = \lambda_a(\lambda_b(s)) = (\lambda_a\lambda_b)(s),$$

valamint

$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = ((s)\varrho_a)\varrho_b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$

ezért az állítás nyilvánvaló. $\square$

5.9. Definíció *Tetszőleges S félcsoport esetén az $a \mapsto \lambda_a$, illetve $a \mapsto \varrho_a$ ($a \in S$) homomorfizmust az S félcsoport bal, illetve jobbreguláris reprezentációjának nevezzük.*

5.10. Definíció *Egy S félcsoportot bal [jobb] reduktívnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $xa = xb$ [$ax = bx$] egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik.*

5.11. Lemma *Egy S félcsoport jobb [bal] reguláris reprezentációja akkor és csak akkor injektív (másképpen: hű), ha S bal [jobb] reduktív.*

Bizonyítás. S jobbreguláris reprezentációja injektív akkor és csak akkor, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén a $\varrho_a = \varrho_b$ egyenlőségből, azaz az $xa = xb$ egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik. Ezz éppen azt jelenti, hogy S bal reduktív. A duális állítás hasonlóan adódik. $\square$

5.12. Lemma *Tetszőleges S félcsoport esetén az S^1 félcsoport jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív.*

Bizonyítás. Mivel S^1 egységelemes félcsoport, ezért S^1 bal, illetve jobb reduktív. Így az 5.11. Lemma szerint S jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív. $\square$

5.13. Definíció *Tetszőleges S félcsoport esetén az S^1 félcsoport jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának S-re való leszűkítését az S félcsoport kiterjesztett jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának nevezzük.*

5.14. Lemma *Tetszőleges S félcsoport kiterjesztett jobb [bal] reguláris reprezentációja injektív.*

Bizonyítás. Az 5.12. Lemma szerint nyilvánvaló. $\square$

5.15. Tétel *Minden félcsoportot be lehet ágyazni egy teljes bal [jobb] transzformációfélcsoportba.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. Az világos, hogy S beágyazható az S^1 félcsoportba. Tekintsük az S^1 félcsoport feletti $\mathcal{T}_{S^1}$ teljes bal transzformációfélcsoportot. Az 5.7. Lemma szerint S^1 bal transzlációi a $\mathcal{T}_{S^1}$ teljes bal transzformációfélcsoporton belül egy részfélcsoportot alkotnak. Az 5.12. Lemma szerint S^1-et be lehet ágyazni ebbe a részfélcsoportba. Így S beágyazható a $\mathcal{T}_{S^1}$ teljes bal transzformációfélcsoportba. A duális állítás hasonlóan igazolható. $\square$

5.16. Lemma *Legyenek λ és ϱ egy S félcsoport tetszőleges bal, illetve jobb transzlációi. Legyen $a \in S$. Akkor*

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}, \quad \text{és} \quad \varrho_a\varrho = \varrho_{(a)\varrho}.$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{(a)\varrho} \quad \text{és} \quad \varrho\varrho_a = \varrho_{\lambda(a)}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in S$ esetén

$$(\lambda\lambda_a)(x) = \lambda(ax) = (\lambda(a))x = \lambda_{\lambda(a)}(x),$$

$$(x)\varrho_a\varrho = (xa)\varrho = x((a)\varrho) = (x)\varrho_{(a)\varrho}.$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$(\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a(\lambda(x)) = ((a)\varrho)x = \lambda_{(a)\varrho}(x),$$

$$(x)(\varrho\varrho_a) = ((x)\varrho)\varrho_a = ((x)\varrho)a = x(\lambda(a)) = (x)\varrho_{\lambda(a)}. \quad \square$$

Jelölések: Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje $\Omega(S)$ az S azon λ bal-, illetve ϱ jobb transzlációiból álló (λ, ϱ) párok halmazát, amelyek láncszemet alkotnak. Jelölje $\Omega_0(S)$ a (λ_a, ϱ_a) párok halmazát.

5.17. Lemma *Tetszőleges S félcsoport esetén $\Omega(S)$ egységelemes félcsoportot alkot a*

$$(\lambda_1, \varrho_1)(\lambda_2, \varrho_2) = (\lambda_1\lambda_2, \varrho_1\varrho_2)$$

műveletre nézve. Ennek a félcsoportnak $\Omega_0(S)$ egy részfélcsoportja. Az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

leképezés S-nek $\Omega_0(S)$-re való homomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyenek λ_1 és λ_2 tetszőleges bal transzlációk, ϱ_1 és ϱ_2 pedig tetszőleges jobb transzlációk. Az nyilvánvaló, hogy $\lambda_1\lambda_2$ bal transzlácó, $\varrho_2\varrho_2$ pedig jobb transzláció. Legyenek $x, y \in S$ tetszőlegesek. Akkor

$$x((\lambda_1\lambda_2)(y)) = x(\lambda_1(\lambda_2(y))) = ((x)\varrho_1)(\lambda_2(y)) = (((x)\varrho_1)\varrho_2)y = ((x)(\varrho_1\varrho_2))y.$$

Ezért $\lambda_1\lambda_2$ és $\varrho_1\varrho_2$ láncszemet alkotnak. Tehát $\Omega(S)$ félcsoport. Az világos, hogy az S félcsoport id_S identikus leképezése bal-, illetve jobb transzláció, és $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S) \in \Omega(S)$. Továbbá, $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S)$ az $\Omega(S)$ egységeleme. Mivel

$$(\lambda_a, \varrho_a)(\lambda_b, \varrho_b) = (\lambda_{ab}, \varrho_{ab}),$$

ezért $\Omega_0(S)$ részfélcsoportja $\Omega(S)$-nek. Az 5.8. Lemma szerint

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

az S félcsoportnak az $\Omega_0(S)$ félcsoportra való homomorfizmusa. □

Az $\Omega(S)$ félcsoportot az S félcsoport transzlációs burkának, az $\Omega_0(S)$ részfélcsoportot az $\Omega(S)$ félcsoport belső részének nevezzük. Egy $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$ bitranszlációt belső bitranszlációnak nevezünk, ha $(\lambda, \varrho) \in \Omega_0(S)$.

5.3. Gyengén reduktív félcsoportok

5.18. Definíció *Egy S félcsoportról akkor mondjuk, hogy gyengén reduktív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $ax = bx$ és $xa = xb$ minden $x \in S$-re való teljesüléséből $a = b$ következik.*

5.19. Lemma *Egy S félcsoport akkor és csak akkor gyengén reduktív, ha az*

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

leképezés az S félcsoportnak az $\Omega_0(S)$ félcsoportra való izomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen S gyengén reduktív félcsoport. Tegyük fel, hogy

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b)$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. akkor

$$\lambda_a = \lambda_b \quad \text{és} \quad \varrho_a = \varrho_b,$$

s ezért S minden x elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül. Mive S gyengén reduktív, ezért

$$a = b.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

homomorfizmus injektív. Ha $a, b \in S$ olyan elemek, hogy S minden x elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül, akkor

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b),$$

s ezért

$$a = b.$$

Tehát S gyengén reduktív. $\square$

5.20. Tétel *Legyen S gyengén reduktív félcsoport. Azonosítsuk S-et az S transzlációs burkának belső részével, azaz az $\Omega_0(S)$ félcsoporttal. Ekkor S ideálja az $\Omega(S)$ félcsoportnak, és minden $a \in S$ $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$ esetén $(\lambda, \varrho)a = \lambda(a)$ és $a(\lambda, \varrho) = (a)\varrho$.*

Bizonyítás. Az 5.16. Lemmát használva,

$$(\lambda, \varrho)a = (\lambda, \varrho)(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda\lambda_a, \varrho\varrho_a) = (\lambda_{\lambda(a)}, \varrho_{\lambda(a)}) = \lambda(a)$$

és

$$a(\lambda, \varrho) = (\lambda_a, \varrho_a)(\lambda, \varrho) = (\lambda_a\lambda, \varrho_a\varrho) = (\lambda_{(a)\varrho}, \varrho_{(a)\varrho}) = (a)\varrho.$$

5.21. Tétel *Legyen $(A;\cdot)$ egy gyengén reduktív félcsoport és $(Q;*)$ tetszőleges nullelemes félcsoport. Legyen $(S';\circ)$ az $\Omega(A)$ félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett valamely ideálbővítése. Legyen $S = A \cup (Q \setminus \{0\}) \subseteq S'$. $(S;\circ)$ akkor és csak akkor olyan részfélcsoportja az $(S';\circ)$ félcsoportnak, amely A-nak Q-val való bővítése, ha Q tetszőleges $a * b = 0$ feltételt teljesítő a és b elemei esetén az $a \circ b$ szorzat S-ben van.*

Fordítva, ha A-nak van Q-val való $(S;\diamond)$ ideálbővítése, akkor $\Omega(A)$-nak van Q-val olyan $(S';\circ)$ ideálbővítése, amelynek $(S;\diamond)$ egy részfélcsoportja.

Bizonyítás. Legyen $(S';\circ)$ az $\Omega(A)$ félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett valamely ideálbővítése. Mivel $\Omega(A)$ egységelemes félcsoport, ezért az 5.5. Tétel szerint a $\circ$ művelet a Q^* parciális gruppoidnak az $\Omega(A)$ félcsoportba való valamely θ parciális homomorfizmusa által van meghatározva. Tetszőleges $x \in Q^*$ elem esetén legyen

$$\theta(x) = (\lambda_x, \varrho_x).$$

Az 5.5. Tétel (5.3) feltétele szerint az $\Omega(A)$ félcsoport tetszőleges (λ, ϱ), valamint Q^* tetszőleges x elemei esetén

$$(\lambda, \varrho) \circ x = (\lambda, \varrho)(\lambda_x, \varrho_x) = (\lambda\lambda_x, \varrho\varrho_x).$$

Ha ezt az eredmény alkalmazzuk az A félcsoport tetszőleges a eleméhez tartozó (λ_a, ϱ_a) elemre, akkor (figyelembe véve, hogy A-t azonosíthatjuk $\Omega_0(A)$-val) azt kapjuk, hogy

$$a \circ x = (\lambda_a\lambda_x, \varrho_a\varrho_x) = (\lambda_{(a)\varrho_x}, \varrho_{(a)\varrho_x}) \in A,$$

alkalmazva az 5.16. Lemmát is. Így

$$A \circ Q^* \subseteq A.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$Q^* \circ A \subseteq A.$$

Ezért

$$A \circ S \subseteq A \quad \text{és} \quad S \circ A \subseteq A.$$

Ha S részfélcsoportja S'-nek, akkor a fentiek alapján A ideálja S-nek és így S az A-nak Q-vel való ideálbővítése. Az előzőek szerint, S akkor és csak akkor részfélcsoportja S'-nek ha $Q^* \circ Q^* \subset S$, ami ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $s, t \in Q^*$ elemek esetén $s * t = 0$-ból $s \circ t \in S$ következik.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az $(S;\diamond)$ félcsoport az A félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett ideálbővítése. Feltehetjük, hogy $S = A \cup Q^*$. Tetszőleges $x \in Q^*$ elem esetén tekintsük az A részfélcsoporton a következőképpen értelmezett $\lambda_x()$ és $()\varrho_x$ leképezéseket:

$$\lambda_x : \ a \ \mapsto \ x \diamond a; \quad \varrho_x : \ a \ \mapsto \ a \diamond x.$$

Mivel A az $(S;\diamond)$ félcsoport ideálja, ezért $\lambda_x()$ és $()\varrho_x$ az A félcsoport önmagába való leképezései (más szóval: transzformációi). Mivel tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén

$$\lambda_x(a \cdot b) = \lambda_x(a \diamond b) = x \diamond (a \diamond b) = (x \diamond a) \diamond b = (\lambda_x(a)) \diamond b = \lambda_x(a) \cdot b,$$

ezért λ_x az A félcsoportnak egy bal transzlációja. Hasonlóan igazolható, hogy ϱ_x az A félcsoportnak egy jobb transzlációja. Mivel tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén

$$a \cdot \lambda_x(b) = a \diamond \lambda_x(b) = a \diamond (x \diamond b) = (a \diamond x) \diamond b = ((a)\varrho_x) \diamond b = (a)\varrho_x \cdot b,$$

ezért a (λ_x, ϱ_x) rendezett pár láncszemet alkot, azaz

$$(\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A).$$

Tekintsük a

$$\phi : \ x \ \mapsto (\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A), \quad x \in Q^*$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy ϕ a Q^* parciális félcsoportnak az $\Omega(A)$ transzlációs burokba való parciális homomorfizmusa. Ehhez tegyük fel, hogy x és y a Q^* parciális félcsoport tetszőleges olyan elemei, amelyekre $xy \neq 0$ teljesül. Mivel $\Omega(A)$ félcsoport, ezért benne a $\phi(x)\phi(y)$ szorzat értelmezve van. Ezért csak azt kell megmutatni, hogy $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Az világos, hogy

$$\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y, \quad \text{és} \quad \varrho_{xy} = \varrho_x \varrho_y.$$

Ezért

$$\phi(xy) = (\lambda_{xy}, \varrho_{xy}) = (\lambda_x \lambda_y, \varrho_x \varrho_y) = (\lambda_x, \varrho_x)(\lambda_y, \varrho_y) = \phi(x)\phi(y).$$

Tehát

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

valóban teljesül. Ezzel beláttuk, hogy ϕ a Q^* parciális félcsoportnak az $\Omega(A)$ transzlációs burokba való parciális homomorfizmusa.

Mivel az $\Omega(A)$ transzlációs burok olyan félcsoport, amelynek van egységeleme, ezért az 5.5. Tétel szerint a ϕ parciális homomorfizmus meghatározza $\Omega(A)$-nak Q-val való valamely $(S'; \circ)$ bővítését. Részletesebben: Tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q^*$ elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \ Q\text{-ban} \\ \phi(x)\phi(y), & \text{ha } x * y = 0 \ Q\text{-ban}, \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \phi(x); \quad x \circ a = \phi(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b.$$

Bizonyításunk teljessé tételéhez elegendő már csak azt megmutatni, hogy tetszőleges $s, t \in S$ elemek esetén $s \circ t = s \diamond t$. Legyenek s és t tetszőleges S-beli elemek.

Ha $s, t \in A$, akkor $s \circ t = st = s \diamond t$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $s \in A$ és $t \in Q^*$, akkor

$$s \circ t = s \cdot \phi(t) = (s)\varrho_t,$$

felhasználva az 5.20. Tételt is. Mivel

$$(s)\varrho_t = s \diamond t,$$

ezért

$$s \circ t = s \diamond t.$$

Ha $s \in Q^*$ és $t \in A$, akkor pedig (felhasználva az 5.20. Tételt is)

$$s \circ t = \phi(s) \circ t = \lambda_s(t) = s \diamond t.$$

Tekintsük végül azt az esetet, amikor $s, t \in Q^*$. Ha $s * t \neq \{0\}$ a Q félcsoportban, akkor

$$s \diamond t = s * t = s \circ t.$$

Ha $st = 0$ a Q félcsoportban, akkor

$$s \diamond t \in A,$$

s ezért minden $a \in A$ elemre

$$(a)(\varrho_s \varrho_t) = ((a)\varrho_s)\varrho_t = (a \diamond s) \diamond t = a \diamond (s \diamond t) = (a)\varrho_{s \diamond t}.$$

Így

$$\varrho_s \varrho_t = \varrho_{s \diamond t}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\lambda_s \lambda_t = \lambda_{s \diamond t}.$$

Ezen eredmények, valamint az 5.5. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$s \circ t = \phi(s)\phi(t) = (\lambda_s, \varrho_s)(\lambda_t, \varrho_t) =$$

$$= (\lambda_s \lambda_t, \varrho_s \varrho_t) = (\lambda_{s \diamond t}, \varrho_{s \diamond t}) = s \diamond t. \qquad \square$$

Az előző tétel azt a problémát, hogy gyengén reduktív A félcsoportok esetén megtaláljuk S nek valamely nullelemes Q félcsoporttal képezett összes ideálbővítését, redukálja arra a problémára, hogy megtaláljuk a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ parciális gruppoidnak az A félcsoport $\Omega(A)$ transzlációs burkába való összes olyan ϕ parciális homomorfizmusát, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $s, t \in Q^*$ elem esetén az $st = 0$ egyenlőségnek a Q-ban való teljesülése esetén a $\phi(s)\phi(t)$ szorzat A-ban van (és nem csak $\Omega(A)$-ban).

5.22. Definíció *Legyen A tetszőleges, Q pedig egy nullelemes félcsoport. Legyen W a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből alkotott azon (s,t) rendezett párok halmaza, amelyek esetén $st = 0$ a Q félcsoportban. A W halmaznak az A félcsoportba való tetszőleges (egyértelmű) leképezését a Q félcsoportnak az A félcsoportba való elágazásának nevezzük. Ha θ a Q^* parciális gruppoidnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa és ϕ a W halmaznak A-ba való olyan leképezése, amely tetszőleges $(s,t) \in W$ elempárhoz a*

$$\phi((s,t)) = \theta(s)\theta(t)$$

szorzatot rendeli, akkor ϕ-t a Q félcsoportnak az A félcsoportba való, a θ által indukált elágazásának nevezzük.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő erdményt.

5.23. Tétel *Legyen A egy gyengén reduktív, Q pedig egy nullelemes félcsoport. Legyen ϕ a Q félcsoportnak az A félcsoportba való elágazása. Legyenek továbbá*

$$s :\mapsto \lambda_s \quad \textit{és} \quad s :\mapsto \varrho_s$$

a Q^*-nak az A félcsoport bal, illetve jobb transzlációinak Λ, illetve P félcsoportjába való olyan leképezései, amelyekre a következők teljesülnek (tetszőleges $s,t \in Q^*$ és tetszőleges $x,y \in A$ elemek esetén)

$$\lambda_s\lambda_t = \begin{cases} \lambda_{st}, & \textit{ha } st \neq 0 \ Q\textit{-ban} \\ \lambda_{\phi((s,t))}, & \textit{ha } st = 0 \ Q\textit{-ban}, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\varrho_s\varrho_t = \begin{cases} \varrho_{st}, & \textit{ha } st \neq 0 \ Q\textit{-ban} \\ \varrho_{\phi((s,t))}, & \textit{ha } st = 0 \ Q\textit{-ban}, \end{cases} \tag{5.6}$$

$$x(\lambda_s(y)) = ((x)\varrho_s)y, \quad \textit{azaz, } \lambda_s \textit{ és } \varrho_s \textit{ láncszemet alkotnak.} \tag{5.7}$$

Legyen $S = A \cup Q^*$, és definiáljunk egy $\circ$ műveletet S-en a következőképpen: tetszőleges $s,t \in Q^*$ és tetszőleges $x,y \in A$ elemek esetén

$$s \circ t = \begin{cases} st, & \textit{ha } st \neq 0 \ Q\textit{-ban} \\ \phi((s,t)), & \textit{ha } st = 0 \ Q\textit{-ban}; \end{cases} \tag{5.8}$$

$$s \circ x = \lambda_s(x); \tag{5.9}$$

$$x \circ s = (x)\varrho_s; \tag{5.10}$$

$$x \circ y = xy. \tag{5.11}$$

Akkor $(S;\circ)$ az A félcsoportnak a Q félcsoporttal való ideálbővítése. Fordítva, az A-nak Q-val való tetszőleges ideálbővítése az előzőekben részletezett módon konstruálható.

Feladatok

5.1. Feladat *(Megoldás: 17.14.) Mutassuk meg, hogy ha egy S félcsoport tartalmaz bal oldali egységelemet, akkor S bal reduktív!*

5.2. Feladat *(Megoldás: 17.15.) Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport esetén az 5.8. Tételben szereplő $a \mapsto \varrho_a$ $(a \in S)$ homomorfizmus akkor és csak akkor injektív, ha S bal reduktív!*

5.3. Feladat *(Megoldás: 17.16.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges balzéró (jobbzéró) félcsoport transzlációs burka izomorf az összes önmagába való leképezéseinek félcsoportjával!*

5.4. Feladat *(Megoldás: 17.17.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges G csoport esetén a G transzlációs burka izomorf G-vel!*

5.5. Feladat *(Megoldás: 17.18.) Mutassuk meg, hogy egy L balzéró és egy R jobbzéró félcsoport $L \times R$ direkt szorzata gyengén reduktív!*

6. fejezet

Reguláris félcsoportok, inverz félcsoportok

6.1. Reguláris elem

6.1. Definíció *Egy S félcsoport valamely a elemét reguláris elemnek nevezzük, ha van az S félcsoportnak olyan x eleme, hogy $axa = a$ teljesül.*

6.2. Lemma *Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemeire, akkor az S félcsoport ax és xa elemei idempotens elemek.*

Bizonyítás. Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemére, akkor

$$(ax)^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax$$

és

$$(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa. \qquad \square$$

6.3. Tétel *(1) Ha a egy S félcsoport reguláris eleme, akkor $aS^1 = aS$ és $S^1a = Sa$.*

(2) Ha a és b egy S félcsoport reguláris elemei, akkor $a\ \mathcal{L}\ b$ [$a\ \mathcal{R}\ b$] akkor és csak akkor teljesül, ha $Sa = Sb$ [$aS = bS$].

Bizonyítás. Legyen a egy S félcsoport reguláris eleme. Akkor megadható olyan S-beli x elem, hogy

$$axa = a.$$

Így

$$aS^1 = \{a\} \cup aS = \{axa\} \cup aS \subseteq aS \subseteq aS^1,$$

s ezért ezért $aS^1 = aS$. Hasonlóan igazolható, hogy $S^1a = Sa$. A (2) feltétel az $\mathcal{L}$-reláció, illetve az $\mathcal{R}$-reláció definíciója és a tétel (1) állítása miatt nyilvánvaló. $\square$

6.4. Tétel *Egy S félcsoport valamely a eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az S félcsoport a eleme által generált fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható, azaz megadhatók olyan e és f idempotens elemek, hogy $S^1a = Se$ és $aS^1 = fS$.*

Bizonyítás. Ha a reguláris elem, akkor a 6.3. Tétel miatt

$$aS^1 = aS \quad \text{és} \quad S^1a = Sa.$$

A reguláris elem definíciója alapján megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$axa = a$$

teljesül. Legyen

$$e = xa.$$

A 6.2. Lemma szerint e idempotens eleme S-nek. Mivel

$$Sa = Saxa = Sae \subseteq Se = Sxa \subseteq Sa,$$

ezért

$$Sa = Se.$$

Hasonlóan igazolható, hogy az $f = ax$ idempotens elemmel

$$aS = fS$$

teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$S^1a = Se$$

teljesül az S félcsoport valamely a eleme és valamely e idempotens eleme esetén. Akkor vannak S^1-nek olyan x és y elemei, hogy

$$a = xe \quad \text{és} \quad e = ya$$

teljesül. Ekkor

$$ae = xe^2 = xe = a$$

és így

$$a = ae = aya,$$

azaz a reguláris elem (ha $y = 1$, akkor a idempotens elem és ezért $a = aaa$). $\square$

6.2. Neumann-féle inverz

6.5. Definíció *Egy S félcsoport a és b elemeiről azt mondjuk, hogy egymás (Neumann-féle) inverzei, ha együtt teljesítik az $aba = a$ és $bab = b$ feltételek mindegyikét. Ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy b az a elem (Neumann-féle) inverze (és hasonlóan, a a b elem (Neumann-féle) inverze).*

Ha a és b egymás inverzei, akkor a 6.2. Tétel szerint ab és ba idempotens elemek. Adott $a \in S$ elem esetén jelölje $V(a)$ az a összes (S-beli) inverzének halmazát, azaz

$$V(a) = \{b \in S : \ aba = a, \ bab = b\}.$$

6.6. Lemma *Ha a egy S félcsoport reguláris eleme, akkor a-nak van S-ben legalább egy inverze.*

Bizonyítás. Ha a reguláris eleme egy S félcsoportnak, akkor van S-nek olyan x eleme, hogy

$$axa = a.$$

Legyen

$$b = xax.$$

Akkor

$$aba = a(xax)a = (axa)(xa) = axa = a$$

és

$$bab = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = b. \qquad \square$$

6.7. Lemma *Ha e, f, ef, fe egy S félcsoport idempotens elemei, akkor ef és fe egymás inverzei.*

Bizonyítás. Legyenek e és f egy S félcsoport olyan idempotens elemei, amelyek esetén ef és fe is idempotens elemek. Akkor

$$(ef)(fe)(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(fe)(ef)(fe) = fe. \qquad \square$$

6.8. Tétel *Legyen D egy S félcsoport tetszőleges $\mathcal{D}$-osztálya.*

(1) Ha D tartalmaz egy reguláris elemet, akkor D minden eleme reguláris (ekkor D-t regulárisnak nevezzük).

(2) Ha D reguláris, akkor minden olyan $\mathcal{L}$-osztály és $\mathcal{R}$-osztály, amely benne van D-ben, tartalmaz egy idempotens elemet.

Bizonyítás. A 6.4. Tétel szerint egy S félcsoport valamely a eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az R_a $[L_a]$ osztály tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ebből viszont már következik, hogy ha egy $\mathcal{R}$-osztály [$\mathcal{L}$-osztály] tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az osztály minden eleme reguláris. Tehát, ha egy D osztály tartalmaz egy a reguláris elemet, akkor R_a minden eleme reguláris. Mivel a D által tartalmazott $\mathcal{L}$-osztályok mindegyikének R_a-val vett metszete nem üres, ezért aD-ben lévő $\mathcal{L}$-osztályok mindgyike tartalmaz egy reguláris elemet, s így minden ilyen $\mathcal{L}$-osztálynak minden eleme (az előzőek szerint) reguláris. Mivel D előáll $\mathcal{L}$-osztályok uniójaként, ezért D minden eleme reguláris.

A (2) állítás a 6.4. Tétel következménye. □

6.9. Megjegyzés *A 6.8. Tétel (1) állítása szerint, ha egy $\mathcal{D}$-osztály nem reguláris, akkor nem tartalmazhat idempotens elemet (mivel egy idempotens elem szükségképpen reguláris). Így, ha a 4.47. Lemmában vizsgált $(T;*)$ félcsoport olyan $\mathcal{D}$-osztály által van definiálva, amely nem reguláris, akkor (a 4.46. Tétel szerint) a $(T;*)$ félcsoport bármely két elemének szorzata egyenlő a nullelemmel, azaz $(T;*)$ egy zéró félcsoport. Ezért a $(T;*)$ félcsoport igazából akkor érdekes számunkra, ha reguláris $\mathcal{D}$-osztály segítségével van definiálva. Ezt láthatjuk majd a 9. fejezetben szereplő 9.22., 9.23. és 9.24. tételekben.*

6.10. Tétel *Ha a és a' egy S félcsoport olyan elemei, amelyek egymás inverzei, akkor az $e = aa'$ és $f = a'a$ idempotens elemekre $e \in R_a \cap L_{a'}$ és $f \in R_{a'} \cap L_a$ teljesülnek. Továbbá $a', e, f \in D_a$.*

Bizonyítás. Az világos, hogy

$$ea = af = a$$

és

$$a'e = fa' = a'.$$

Ebből már következik

$$e \in R_a \cap L_{a'} \subseteq D_a$$

és

$$f \in R_{a'} \cap L_a \subseteq D_a,$$

figyelembe véve az e és f elemek definícióját is. Ekkor

$$e \in D_a \cap L_{a'}$$

miatt

$$L_{a'} \cap D_a \neq \emptyset,$$

amiből

$$a' \in L_{a'} \subseteq D_a$$

következik. Tehát

$$a', e, f \in D_a. \qquad \square$$

6.11. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges a reguláris eleme esetén az alábbiak teljesülnek.*

(1) Az a elem minden inverze D_a-ban van.

(2) Egy b elemhez tartozó $\mathcal{H}$-osztály akkor és csak akkor tartalmazza az a elem valamely inverzét, ha az $R_a \cap L_b$ és $R_b \cap L_a$ $\mathcal{H}$-osztályok mindegyike tartalmaz egy idempotens elemet.

(3) Nincs S-nek olyan $\mathcal{H}$-osztálya, amely az a-nak egynél több inverzét tartalmazná.

Bizonyítás. Az (1) állítás a 6.10. Tétel következménye. Ahhoz, hogy megmutassuk (2) teljesülését, tegyük fel először, hogy H_b tartalmazza az a elem egy a' inverzét. A 6.10. Lemma szerint az $R_a \cap L_b$ $(= R_a \cap L_{a'})$ $\mathcal{H}$-osztály tartalmazza az aa' idempotens elemet, az $R_b \cap L_a$ $(= R_{a'} \cap L_a)$ $\mathcal{H}$-osztályok pedig az $a'a$ idempotens elemet. Fordítva, legyen e egy idempotens eleme $R_a \cap L_b$-nek f pedig egy idempotens eleme $R_b \cap L_a$-nak. Mivel $a \, \mathcal{R} \, e$ és $a \, \mathcal{L} \, f$, ezért a 4.42. Tétel miatt

$$ea = a = af.$$

Továbbá a 6.3. Tétel miatt

$$e = ax, \quad f = ya$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Legyen

$$a' = fxe.$$

Akkor

$$fa' = a'e = a',$$

$$aa' = afxe = axe = e^2 = e,$$

$$a'a = fa'a = yaa'a = yea = ya = f.$$

Mivel

$$aa'a = ea = a \quad \text{és} \quad a'aa' = a'e = a',$$

ezért a' és a egymás inverzei. Az

$$fa' = a' \quad \text{és} \quad a'a = f$$

egyenlőségekből
$$a' \mathcal{R} f$$
következik. Az
$$a'e = a' \quad \text{és} \quad aa' = e$$
egyenlőségekből pedig
$$a' \mathcal{L} e$$
adódik. Így
$$a' \in R_f \cap L_e = R_b \cap L_b = H_b.$$

A (3)-as feltétel igazolásához tekintsünk olyan $\mathcal{H}$-ekvivalens $b$és c elemeket az S félcsoportból, melyek egy a elem inverzei a 6.10. Lemma szerint az ab idempotens elem $R_a \cap L_b$-ban, az ac idempoten elem pedig $R_a \cap L_c$-ben van. Azonban $L_b = L_c$, és így
$$ab = ac$$
a 4.43. Tétel szerint. Az $R_a = R_c$ feltételből hasonló okok miatt következik, hogy
$$ba = ca.$$
Így
$$b = bab = cab = cac = c.$$
□

6.3. Reguláris félcsoportok

6.12. Definíció *Egy S félcsoportot reguláris félcsoportnak nevezünk, ha S minden eleme reguláris.*

6.13. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S reguláris félcsoport.

(2) S minden $\mathcal{L}$-osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

(3) S minden $\mathcal{R}$-osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

Bizonyítás. Legyen S reguláris félcsoport. Jelölje L az S valamely $\mathcal{L}$-osztályát. Legyen $a \in L$ tetszőleges elem. Mivel a 6.4. Tétel szerint van S-nek olyan e idempotens eleme, amelyre
$$Sa = Se$$
teljesül, ezért
$$e \in L.$$

Tehát (1)-ből következik (2). Hasonlóan igazolható, hogy (1)-ből következik (3).

Tegyük fel, hogy (2) teljesül egy S félcsoportra. Ez azt jelenti, hogy tetszőlege $a \in S$ elem $\mathcal{L}$-relációban van S valamely e idempotens elemével, azaz

$$S^1 a = Se.$$

Más szavakkal: az a elem által generált fő bal oldali ideál az e idempotens elemmel generálható. A 6.4. Tétel miatt ebből már következik, hogy a az S félcsoport reguláris eleme. Tehát (2)-ből következik (1). Hasonlóan igazolható, hogy (3)-ból következik (1). Ezzel pedig bizonyítást nyert, hogy a tételben szereplő három feltétel egymással ekvivalens. □

6.14. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha $R \cap L = RL$ teljesül az S tetszőleges jobb oldali R és tetszőleges bal oldali L ideáljaira.*

Bizonyítás. Legyenek R és L egy S félcsoport tetszőleges jobb, illetve bal oldali ideáljai. Akkor

$$RL \subseteq R \cap L.$$

Tegyük fel, hogy S reguláris. Akkor tetszőleges $a \in R \cap L$ elem esetén

$$a = axa = a(xa) \in RL$$

teljesül az S félcsoport alkalmas x elemével. Így

$$R \cap L \subseteq RL.$$

Ennek, és a fenti tartalmazásnak eredményeként

$$R \cap L = RL.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelyben

$$R \cap L = RL$$

teljesül tetszőleges jobb oldali R, illetve tetszőleges bal oldali L ideálokra. Legyen

$$a \in S$$

tetszőleges elem. Akkor

$$R(a) \cap L(a) = R(a)L(a),$$

ahol $R(a)$, illetve $L(a)$ jelölik az S félcsoport a által generált jobb oldali, illetve bal oldali ideálját. Mivel

$$a \in R(a) \cap L(a),$$

ezért
$$a \in R(a)L(a) = aS^1S^1a \subseteq aS^1a,$$
azaz van olyan $x \in S^1$ elem, hogy
$$a = axa.$$
Tehát a az S félcsoport reguláris eleme (abban az esetben, amikor x az S^1 egységeleme, akkor a idempotens elem, s így szükségképpen reguláris). Mivel a az S félcsoport tetszőleges eleme volt, ezért S reguláris félcsoport. □

6.15. Definíció *Egy S félcsoport valamely a elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha megadható olyan S-beli x elem, amelyre $axa = a$ és $ax = xa$ teljesül. Egy S félcsoportot teljesen reguláris félcsoportnak nevezünk, ha S minden eleme teljesen reguláris.*

6.16. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha S előáll részcsoportjainak uniójaként.*

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoport, amely előáll G_i $(i \in I)$ részcsoportjainak úniójaként. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Akkor $a \in G_j$ valamely $j \in I$ index esetén. Mivel G_i csoport, ezért az a elem G_i-beli x inverzére
$$axa = a, \quad ax = xa$$
teljesül, azaz a az S félcsoport teljesen reguláris eleme. Mivel a az S félcsoport tetszőleges eleme, ezért S teljesen reguláris félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy S egy teljesen reguláris félcsoport. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Mivel a teljesen reguláris, ezért van S-nek olyan x eleme, hogy
$$axa = a, \quad \text{és} \quad ax = xa.$$
A 6.2. Lemma szerint
$$e = ax = xa$$
az S félcsoport idempotens eleme. Mivel $ae = ea = a$ és $ax = xa = e$, ezért az 1.41. Tétel szerint
$$G_e = \{s \in S : \ s = se = es, \quad \text{és} \quad (\exists s' \in S) \quad ss' = s's = e\}$$
S-nek olyan részcsoportja, amely tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e egységelem. Az világos, hogy
$$a \in G_e.$$
Ebből már következik, hogy S előáll részcsoportjainak uniójaként. □

6.17. Definíció *Egy S félcsoport valamely a elemét bal [jobb] egyszerűsíthetőnek nevezzük, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $ax = ay$ [$xa = ya$] feltételből $x = y$ következik. Ha egy félcsoport minden eleme bal [jobb] egyszerűsíthető, akkor a félcsoportot bal [jobb] egyszerűsítéses félcsoportnak nevezzük. Ha egy félcsoport bal egyszerűsítéses is és jobb egyszerűsítéses is, akkor egyszerűsítéses félcsoportnak nevezzük.*

6.18. Tétel *Minden egyszerűsítéses, reguláris félcsoport szükségképpen csoport.*

Bizonyítás. Legyen S egyszerűsítéses, reguláris félcsoport. Akkor tetszőleges $a \in S$ elemhez van olan $x \in S$ elem, hogy $axa = a$ teljesül. Így tetszőleges $b \in S$ elem esetén $axab = ab$, amiből a bal egyszerűsíthetőség miatt $xab = b$ adódik. Ekkor viszont $bxab = b^2$, amiből a jobb egyszerűsíthetőség miatt $bxa = b$ adódik. Tehát xa az S félcsoport egységeleme. Tehát minden $a \in S$ elem esetén van olyan $x \in S$ elem, hogy xa az S egységeleme. Az x elem tehát az a elem bal oldali inverze. Ebből már következik, hogy S csoport. □

6.4. Inverz félcsoportok

6.19. Definíció *Egy S félcsoportot inverz félcsoportnak nevezünk, ha minden elemének van egy és csak egy inverze.*

6.20. Tétel *Tetszőleges S félcsoport esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

(1) S reguláris félcsoport, amelynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek.

(2) S minden fő jobb ideálja és minden fő bal ideálja egyetlen idempotens elemmel generálható.

(3) S inverz félcsoport.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2): Legyen S olyan reguláris félcsoport, melynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek. A 6.4. Tétel miatt S minden fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható. Tegyük fel, hogy $Se = Sf$ teljesül valalmely S-beli e és f idempotens elemekre. Akkor megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$e = xf, \quad f = ye$$

teljesül. Az első egyenlőségből

$$ef = (xf)f = xf^2 = xf = e,$$

a második egyenlőségből pedig

$$fe = (ye)e = ye^2 = ye = f$$

adódik. Ezek az egyenlőségek az e és f elemek egymással való felcserélhetősége miatt az

$$e = ef = fe = f$$

teljesülését eredményezik. Így S minden fő bal oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható. Hasonló módon bizonyítható, hogy S minden fő jobb oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható.Így (1)-ből következik (2).

(2)-ből következik (3): Legyen S olyan félcsoport, amely teljesíti a (2) feltételt. A 6.4. Tétel miatt S reguláris félcsoport. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. A 6.6. Lemma szerint A-nak van legalább egy b inverze. Tegyük fel, hogy valamely S-beli c elem is inverze a-nak. Akkor

$$aba = a, \quad bab = b,$$

$$aca = a, \quad cac = c.$$

A 6.4. Tétel bizonyítását is figyelembe véve, ezekből könnyen adódik, hogy

$$Sba = Sa = Sca$$

és

$$abS = aS = acS.$$

A (2) feltétel miatt

$$ba = ca$$

és

$$ab = ac,$$

mivel a 6.2. Lemma szerint ba, ca, ab, ac idempotens elemek. A ba és ca szorzatok ugyanazt a fő bal oldali ideált (Sa-t), az ab és ac szorzatok pedig ugyanazt a fő jobb oldali ideált (aS-et) generálják. Ebből pedig

$$b = bab = bac = cac = c$$

következik, azaz az a elemnek pontosan egy inverze van. Következésképpen S inverz félcsoport.

(3)-ból következik (1): Legyen S egy inverz félcsoport. Mivel egy inverz félcsoport reguláris, ezért csak azt kell megmutatni, hogy S bármely két idempotens eleme felcserélhető. Legyenek e és f az S félcsoport tetszőleges idempotens elemei. Először megmutatjuk, hogy ha e és f idempotens elemei S-nek, akkor ef is idempotens elem. Legyen a egy inverze ef-nek. Akkor

$$(ef)a(ef) = ef$$

és

$$a(ef)a = a.$$

Legyen
$$b = ae.$$
Akkor
$$(ef)b(ef) = (ef)a(eef) = (ef)a(ef) = ef$$
és
$$b(ef)b = (ae)(ef)(ae) = (aefa)e = ae = b.$$
Ezért b inverze ef-nek. Ekkor viszont
$$ae = a,$$
mivel ef-nek csak egy inverze lehet. Hasonlóan igazolható, hogy
$$fa = a.$$
Ezért
$$a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a,$$
azaz a idempotens elem. Mivel idempotens elem önmagának inverze, ezért
$$a = ef,$$
azaz ef idempotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy fe is idempotens eleme. Ekkor viszont a 6.7. Lemma miatt fe az ef inverze. Mivel ef idempotens, ezért ef önmagának is inverze, amiből $ef = fe$ következik. Tehát S olyan reguláris félcsoport, melynek idempotensei egymással felcserélhetőek. □

6.21. Következmény *Egy S félcsoport akkor és csak akkor inverz félcsoport, ha S minden $\mathcal{L}$-osztálya és minden $\mathcal{R}$-osztálya tartalmaz egy és csak egy idempotens elemet.*

Bizonyítás. Legyen S inverz félcsoport. Akkor S teljesíti a 6.20. Tétel (3) feltételét. Ebből viszont következik a (2) feltétel, ami annyit jelent, hogy S minden $\mathcal{L}$-osztálya és minden $\mathcal{R}$-osztálya pontosan egy idempotens elemet tartalmaz.

Fordítva, ha S olyan félcsoport, amelyben minden $\mathcal{L}$-osztály és minden $\mathcal{R}$-osztály pontosan egy idempotens elemet tartalmaz, akkor S minden fő bal oldali ideálja és minden fő jobb oldali ideálja pontosan egy idempotenssel generálható, azaz S teljesíti a a 6.20. Tétel (2) feltételét. Ebből a feltételből következik (3) feltétel, s ezért S inverz félcsoport. □

6.22. Lemma *Ha e és f egy inverz S félcsoport idempotens elemei, akkor $Se \cap Sf = Sef(= Sfe)$.*

Bizonyítás. Ha $a \in Se \cap Sf$, akkor
$$ae = af = a,$$
és így
$$aef = af = a,$$
ami miatt
$$a \in Sef.$$
Tehát
$$Se \cap Sf \subseteq Sef.$$
Fordítva, ha $a \in Sef = Sfe$, akkor
$$aef = afe = a,$$
ami miatt
$$ae = af = a,$$
azaz
$$a \in Se \cap Sf.$$
Tehát
$$Sef \subseteq Se \cap Sf.$$
Következésképpen,
$$Se \cap Sf = Sef.$$
□

6.23. Definíció *Egy X halmaz $(\cdot)\alpha$ kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációján X egy Y részhalmazának egy $Y' = (X)\alpha$ részhalmazra való bijekcióját értjük. Az α inverzét a szokásos módon értelmezzük, és α^{-1}-gyel jelöljük, azaz $(y')\alpha^{-1} = y$ akkor és csak akkor, ha $(y)\alpha = y'$ $(y \in Y,\ y' \in Y')$.*

Jelölje $\mathcal{I}_X$ az X összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak halmazát, beleértve az X üres részhalmazának önmagára való leképezését, amelyet 0-val jelölünk és üres transzformációnak nevezünk. A $\mathcal{I}_X$ halmazon definiálunk egy műveletet a következőképpen. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_X$ tetszőleges transzformációk. Legyen Y az α, Z pedig a β értelmezési tartománya. Ha $(Y)\alpha \cap Z = \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta = 0$. Ha $(Y)\alpha \cap Z \neq \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta$ $\mathcal{I}_X$-nek az az eleme, amelynek értelmezési tartománya $((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ és minden $v \in ((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ esetén legyen $(v)\alpha\beta = ((v)\alpha)\beta$.

6.24. Lemma *Tetszőleges X halmaz esetén $\mathcal{I}_X$ inverz félcsoportot alkot a fent definiált műveletre nézve.*

Bizonyítás. Az asszociativitás teljesülése nyilvánvaló, ezért $\mathcal{I}_X$ félcsoport. Mivel minden $\alpha \in \mathcal{I}_X$ esetén $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$ (és $\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$), ezért $\mathcal{I}_X$ reguláris félcsoport. Legyen α tetszőleges idempotens eleme $\mathcal{I}_X$-nek. Legyen Y az α értelmezési tartománya. Mivel α^2 értelmezési tartománya $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1}$, ezért $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1} = Y$, amiből $Y \cap Y\alpha = Y\alpha$, s ebből pedig $Y\alpha \subseteq Y$ következik. Legyen $a \in Y\alpha$ tetszőleges elem. Akkor $a = b\alpha$ $(b \in Y)$, s ezért $a\alpha = b\alpha\alpha = b\alpha = a$, azaz α identikusan hat $Y\alpha$-n. Ebből az is következik, hogy $Y = Y\alpha$, mivel α bijektív. Tehát $\mathcal{I}_X$ valamely eleme akkor és csak akkor idempotens elem, ha identikusan hat X valamely részhalmazán. Ezért az idempotens elemek egymással felcserélhetőek. Ebből viszont a 6.20. Tétel miatt $\mathcal{I}_X$ inverz félcsoport. □

6.25. Definíció *A $\mathcal{I}_X$ félcsoportot az X halmaz feletti szimmetrikus inverz félcsoportnak nevezünk.*

A csoportelméletben jól ismert az a tétel, hogy minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Ennek a tételnek az inverz félcsoportokra való általánosítása a következő tétel.

6.26. Tétel *Minden S inverz félcsoport izomorf az S feletti szimmetrikus inverz félcsoport egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S inverz félcsoport. Minden $a \in S$ elemhez rendeljük hozzá $Sa^{-1} = Saa^{-1}$-nek $Sa = Sa^{-1}a$-ra való $\varrho_a : \ x \mapsto xa$ leképezését. Nyilvánvaló, hogy $\varrho_{a^{-1}}$ Sa-t képezi le Sa^{-1}-re. Legyenek $x \in Sa^{-1}$ és $y \in Sa$ tetszőleges elemek. Akkor $xaa^{-1} = x$ és $ya^{-1}a = y$. Ezért

$$(x)\varrho_a\varrho_{a^{-1}} = xaa^{-1} = x$$

és

$$(y)\varrho_{a^{-1}}\varrho_a = ya^{-1}a = y,$$

amiből következik, hogy ϱ_a és $\varrho_{a^{-1}}$ egymás inverzei $\mathcal{I}_S$-ben, azaz $\varrho_a^{-1} = \varrho_{a^{-1}}$. Megmutatjuk, hogy az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetés izomorfizmus. Először belátjuk, hogy a megfeleltetés injektív. Tegyük fel, hogy $\varrho_a = \varrho_b$, $(a, b \in S)$. Akkor $Saa^{-1} = Sbb^{-1}$, s ezért $aa^{-1} = bb^{-1}$, mivel idempotensek. Ha $x \in Saa^{-1}$, akkor $xa = (x)\varrho_a = (x)\varrho_b = xb$. Mivel $a^{-1} \in Saa^{-1}$, ezért $a^{-1}a = a^{-1}b$. Ekkor viszont

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Végül megmutatjuk, hogy a megfeleltetés műveletettartó, azaz $\varrho_a\varrho_b = \varrho_{ab}$. A ϱ_{ab} értelmezési tartománya $S(ab)(ab)^{-1}$. A $\varrho_a\varrho_b$ értelmezési tartománya $(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}}$. Alkalmazva a 6.22. Lemmát,

$$Saa^{-1} \cap Sbb^{-1} = Saa^{-1}bb^{-1} = Sabb^{-1}.$$

Így
$$(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}} = (Sabb^{-1})a^{-1} = Sabb^{-1}a^{-1} = S(ab)(ab)^{-1}.$$
Tehát ϱ_{ab} és $\varrho_a\varrho_b$ értelmezési tartománya megegyezik. Mivel minden $s \in S$ elemre
$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$
ezért
$$\varrho_{ab} = \varrho_a\varrho_b. \qquad \square$$

Feladatok

6.1. Feladat *(Megoldás: 17.19.) Mutassuk meg, hogy inverz félcsoport tetszőleges a és b elemei esetén $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, ahol $(\cdot)^{-1}$ jelöli egy S-beli elem (Neumann-féle) inverzét.*

6.2. Feladat *(Megoldás: 17.20.) Mutassuk meg, hogy egy kommutatív reguláris félcsoport részcsoportok úniója.*

6.3. Feladat *(Megoldás: 17.21.) Mutassuk meg, hogy egyetlen idempotens elemet tartalmazó reguláris félcsoport szükségképpen csoport.*

7. fejezet

Jobb egyszerű és jobb 0-egyszerű félcsoportok

7.1. Definíció *Egy S félcsoport S-től különböző jobb oldali [bal oldali] ideáljait valódi jobb oldali [bal oldali] ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot jobb [bal] egyszerűnek nevezünk, ha nincs nem valódi jobb [bal] oldali ideálja.*

7.2. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor jobb [bal] egyszerű, ha $aS = S$ $(Sa = S)$ teljesül minden $a \in S$ eleme esetén.*

Bizonyítás. Legyen S jobb egyszerű félcsoport. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén, aS az S egy jobb oldali ideálja, s ezért

$$aS = S.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy minden $a \in S$ elem esetén $aS = S$. legyen R tetszőleges jobb oldali ideálja S-nek. Akkor tetszőleges $a \in R$ elem esetén

$$S = aS \subseteq RS \subseteq R,$$

azaz az $R \subseteq S$ tartalmazás miatt

$$R = S$$

következik. Tehát S jobb egyszerű. □

7.3. Tétel *Egy félcsoport akkor és csak akkor csoport, ha jobb egyszerű és bal egyszerű.*

Bizonyítás. A 7.2. Tétel és az 1.25. Tétel felhasználásával a tétel állítása nyilvánvaló. □

7.4. Tétel *Minden kommutatív egyszerű félcsoport csoport.*

Bizonyítás. Ha S kommutatív egyszerű félcsoport, akkor bal egyszerű is és jobb egyszerű is, s ezért a 7.3. Tétel miatt S egy csoport. □

7.5. Megjegyzés *Ha egy S félcsoportnak van 0 nulleleme, akkor $\{0\}$ az S bal oldali és jobb oldali ideálja; az S-től és $\{0\}$-tól különböző bal-, illetve jobb oldali ideálokat valódi bal-, illetve jobb oldali ideáloknak nevezzük. Ha S-ben nincs valódi bal-, illetve jobb oldali ideál, akkor S-nek nincs valódi ideálja, s ezért a 4.5. Megjegyzés szerint $S^2 = S$ vagy $S^2 = \{0\}$. Ezen utóbbi esetben S-nek legfeljebb két eleme van.*

7.6. Definíció *Egy nullelemes S félcsoportot jobb 0-egyszerűnek [bal 0-egyszerűnek] nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$ és S-nek nincs valódi jobb [bal] oldali ideája.*

7.7. Tétel *Legyen S egy nullelemes félcsoport. S jobb 0-egyszerű [bal 0-egyszerű] akkor és csak akkor, ha $S - \{0\}$ jobb egyszerű [bal egyszerű] félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges nullelemes félcsoport. Tegyük fel, hogy S jobb 0-egyszerű. Tegyük fel, hogy a és b az S félcsoport olyan nem nulla elemei, amelyekre $ab = 0$ teljesül. Akkor

$$Z_a = \{x \in S : \ ax = 0\}$$

az S félcsoport b-t tartalmazó jobb oldali ideálja, amely egyenlő S-sel az S félcsoport jobb 0-egyszerűsége miatt. Ekkor viszont $aS = \{0\}$, amiből következik, hogy

$$Z = \{x \in S : \ xS = \{0\}\}$$

az S félcsoport a-t tartalmazó jobb oldali ideálja. Mivel S jobb 0-egyszerű, ezért

$$Z = S.$$

Ez viszont azt eredményezi, hogy

$$S^2 = \{0\},$$

ami ellentmondás. Tehát S-ben a nemnulla elemek egy részfélcsoportot alkotnak. Legyen B tetszőleges jobb oldali ideálja $S - \{0\}$-nak. Akkor

$$\{0\} \neq B \cup \{0\}$$

jobb oldali ideálja S-nek, és így

$$B \cup \{0\} = S.$$

Ebből

$$B = S - \{0\}$$

adódik. Tehát $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoport.

Fordítva, legyen $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoport. Akkor

$$(S - \{0\})^2 = S - \{0\}.$$

Így
$$S^2 \neq \{0\}.$$
Legyen B tetszőleges nemnulla jobb oldali ideálja S-nek. Az világos, hogy $0 \in B$. Mivel $B - \{0\}$ jobb oldali ideálja az $S - \{0\}$ félcsoportnak, ezért
$$B - \{0\} = S - \{0\}$$
az $S - \{0\}$ félcsoport jobb egyszerűsége miatt. Így
$$B = S.$$
Tehát S jobb 0-egyszerű. Ezzel a tételt bebizonyítottuk a jobb oldali esetre. A bal oldali eset bizonyítása hasonlóan végezhető el. □

7.8. Megjegyzés *Az előző tétel alapján a jobb* 0*-egyszerű, illetve a bal* 0*-egyszerű félcsoportokat megkaphatjuk, ha a jobb egyszerű, illetve a bal egyszerű félcsoportokhoz nullelemet adjungálunk.*

7.9. Tétel *Egy* 0*-elemes S félcsoport akkor és csak akkor bal [jobb]* 0*-egyszerű, ha tetszőleges $a \in S \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = S$ [$aS = S$].*

Bizonyítás. Legyen S egy 0-elemes félcsoport. A 7.7. Tétel szerint S bal 0-egyszerű akkor és csak akkor, ha $G = S \setminus \{0\}$ bal egyszerű félcsoport. Ezért ha S bal 0-egyszerű, akkor tetszőleges $a \in G$ elem esetén
$$Sa = (\{0\} \cup G)a = \{0\} \cup Ga = \{0\} \cup G = S,$$
felhasználva a 7.2. Tételt is. Fordítva, ha minden $a \in S \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = S$, akkor tetszőleges $L \neq \{0\}$ bal oldali ideál tetszőleges $a \neq 0$ elemére
$$S = Sa \subseteq L$$
adódik, s ezért azt kapjuk, hogy
$$L = S,$$
amiből már következik, hogy S bal 0-egyszerű. □

7.10. Tétel *Tetszőleges* 0*-elemes S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S jobb* 0*-egyszerű és bal* 0*-egyszerű;*
2. *$G = S - \{0\}$ csoport, és így S a G csoportból egy nullelem adjungálásával áll elő.*

Bizonyítás. Legyen S egy 0-elemes félcsoport. Tegyük fel, hogy S jobb 0-egyszerű és bal 0-egyszerű. Akkor a 7.7. Tétel miatt $G = S \setminus \{0\}$ bal egyszerű és jobb egyszerű félcsoport. A 7.3. Tétel miatt G egy csoport.

Fordítva, ha $S \setminus \{0\}$ csoport, akkor minden $a \in G$ elem esetén

$$aS = a(\{0\} \cup G) = \{0\} \cup G = S.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$Sa = S.$$

A 7.9. Tétel miatt S jobb- és bal 0-egyszerű. □

7.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoportok

7.11. Lemma *Jobb egyszerű félcsoport minden idempotens eleme bal oldali egységelem.*

Bizonyítás. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoport tetszőleges idempotens eleme. Mivel S jobb egyszerű, ezért tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható S-nek olyan x eleme, melyre

$$ex = a$$

teljesül. Így,

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

minden $a \in S$ elemre. Tehát e bal oldali egységeleme S-nek. □

A következőkben azokkal a jobb egyszerű félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek tartalmaznak legalább egy idempotens elemet (ilyenek például a véges jobb egyszerű félcsoportok).

7.12. Lemma *Ha S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet, akkor S bal egyszerűsítéses.*

Bizonyítás. Jelöljön S egy olyan jobb egyszerű félcsoportot, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ca = cb.$$

Legyen $f \in E_S$ tetszőleges idempotens elem. A 7.11. Tétel szerint f az S bal oldali egységeleme. Mivel S jobb egyszerű, ezért van S-nek olyan x eleme, hogy

$$cx = f.$$

Legyen
$$e = xc.$$
Akkor
$$e^2 = xcxc = xfc = xc = e,$$
azaz
$$e \in E_S,$$
felhasználva azt is, hogy f az S bal oldali egységeleme. Igy
$$a = ea = xca = xcb = eb = b.$$
Tehát S bal egyszerűsítéses. □

7.13. Lemma *Legyen S jobb egyszerű félcsoport, $e \in S$ tetszőleges idempotens elem. Akkor Se csoport.*

Bizonyítás. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoport tetszőleges idempotens eleme. A 7.11. Tétel miatt e bal oldali egységeleme S-nek. Így az Se részfélcsoportnak e bal oldali egységeleme. Mivel minden $a \in Se$ elem $a = se$ alakban irható valamely $s \in S$ elemmel, ezért
$$ae = (se)e = se^2 = se = a,$$
azaz e az Se részfélcsoportban jobb oldali egységelem is. Tehát Se egységelemes félcsoport (benne e az egységelem). Legyen
$$a \in Se$$
tetszőleges elem. Mivel S jobb egyszerű, ezért van olyan $x \in S$ elem, hogy
$$ax = e.$$
Ebből
$$a(xe) = (ax)e = e^2 = e$$
adódik. Tehát $xe \in Se$ az $a \in Se$ elem jobb oldali inverze. Ebből már következik az 1.25. Tétel szerint, hogy Se az S félcsoport részcsoportja. □

7.14. Definíció *Egy S félcsoportot jobbcsoportnak nevezünk, ha jobb egyszerű és bal egyszerűsítéses.*

7.15. Lemma *Egy S félcsoport akkor és csak akkor jobbcsoport, ha az $ax = b$ egyenletnek van egy és csak egy megolása S-ben minden $(a, b) \in S \times S$ elempár esetén.*

Bizonyítás. A Lemma állítása a jobbcsoport definíciójának, illetve a 7.2. Tételnek közvetlen következménye. □

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden csoport jobbcsoport, illetve minden jobbzéró félcsoport is jobbcsoport.

7.16. Tétel *Tetszőleges S félcsoportra a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

(1) S jobbcsoport.

(2) S jobb egyszerű, és tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

(3) S egy csoportnak és egy jobbzéró félcsoportnak a direkt szorzata.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2): Minden jobbcsoport jobb egyszerű definíció szerint, ezért csk azt kell megmutatni, hogy minden jobbcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyen a egy S jobbcsoport tetszőleges eleme. S jobb egyszerűsége miatt van olyan $e \in S$ elem, hogy

$$ae = a,$$

és így

$$ae^2 = ae,$$

amiből

$$e^2 = e$$

következik S bal egyszerűsíthetősége miatt. Tehát e az S félcsoport idempotens eleme.

(2)-ből következik (3): Legyen S olyan tetszőleges jobb egyszerű félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 7.11. Lemma szerint S minden idempotens eleme az S bal oldali egységeleme. A 7.12. Lemma szerint S bal egyszerűsítéses. A 7.13. Lemma szerint minden S-beli e idempotens elem esetén Se az S részcsoportja.

A bizonyítás további részében legyen e az S egy rögzített idempotens eleme. Jelölje G az Se részcsoportot. Mivel E_S minden eleme az S bal oldali egységeleme, ezért E_S az S jobbzéró részfélcsoportja. Meg fogjuk mutatni, hogy a G csoportnak az E_S jobb zéró félcsoporttal képezett $G \times E_S$ direkt szorzata izomorf S-sel. Pontosabban, megmutatjuk, hogy

$$\Phi : \ (g, f) \ \mapsto \ gf$$

a $G \times E_S$ direkt szorzatnak S-re való izomorfizmusa. Mivel

$$\Phi((g_1, f_1)(g_2, f_2)) = \Phi((g_1g_2, f_1f_2)) = \Phi((g_1g_2, f_2)) =$$

$$= (g_1g_2)f_2 = g_1f_1g_2f_2 = \Phi((g_1, f_1))\Phi((g_2, f_2)),$$

ezért Φ a $G \times E_S$ direkt szorzatnak az S félcsoportba való homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy

$$\Phi((g_1, f_1)) = \Phi((g_2, f_2)),$$

azaz

$$g_1 f_1 = g_2 f_2.$$

Akkor

$$g_1 = g_1 e = g_1 f_1 e = g_2 f_2 e = g_2 e = g_2$$

és így

$$g_2 f_2 = g_1 f_1 = g_2 f_1.$$

Mivel S bal egyszerűsítéses, ezért

$$f_2 = f_1.$$

Tehát

$$(g_1, f_1) = (g_2, f_2),$$

és ezért Φ injektív. Már csak azt kell megmutatni, hogy Φ szürjektív. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Akkor $ax = a$ valamely $x \in S$-re, amiből $ax^2 = ax$, ebből pedig $x^2 = x$ következik (ez utóbbi az S bal egyszerűsíthetősége miatt). Igy $x \in E_S$, és

$$\Phi((ae, x)) = aex = ax = a.$$

Tehát Φ szürjektív. Így $S \cong G \times E_S$.

(3)-ból következik (1): A bizonyítás triviális, mivel egy csoport és egy jobbzéró félcsoport jobbcsoport, ezért azok direkt szorzata is jobbcsoport. □

7.17. Tétel *Egy félcsoport akkor és csak akkor jobbcsoport, ha olyan diszjunkt részcsoportjainak uniója, melyek egységelemei a félcsoport jobbzéró részfélcsoportját alkotják.*

Bizonyítás. Legyen S jobbcsoport. Akkor a 7.11. Tétel miatt S minden idempotens eleme bal oldali egységelem, s ezért S idempotenseinek E_S halmaza az S félcsoport egy jobbzéró részfélcsoportját alkotja. Legyenek $a \in S$ és $e \in E_S$ tetszőleges elemek. Mivel S jobb egyszerű, ezért megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre $ax = e$ teljesül. Ebből $axa = ea = a$ adódik, mivel e bal oldali egységeleme S-nek. Megszorozva ezen utóbbi egyenlőséget x-szel balról, azt kapjuk, hogy $(xa)^2 = xa$, azaz, $f = xa \in E_S$. Így $a = axa = af \in Sf$. Mivel Sf részcsoportja S-nek (lásd a 7.13. Tételt), ezért azt kaptuk eredményként, hogy S minden eleme benne van S egy részcsoportjában. Így S diszjunkt részcsoportok uniója, s a részcsoportok egységelemei (azaz az S idempotens elemei) az S egy jobbzéró részfélcsoportot alkotják.

Fordítva, legyen S olyan félcsoport, amely olyan diszjunkt részcsoportjainak uniója, amelyek egységelemei az S félcsoport jobbzéró részfélcsoportját alkotják. A felbontásban szereplő részcsoportok az S maximális részcsoportjai. A 7.16. Tétel szerint elegendő azt megmutatni, hogy S jobb egyszerű. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan S-beli e és f idempotens elemek, hogy

$$a \in G_e \quad \text{és} \quad b \in G_f,$$

ahol G_e és G_f jelölik S azon maximális részcsoportjait, amelyek egységelemei az e, illetve az f idempotens elemek. Jelöljék

$$a^{-1} \in G_e, \quad b^{-1} \in G_f$$

az a, illetve b elemek inverzeit (G_e-ben, illetve G_f-ben). Akkor

$$aa^{-1}b = eb = e(fb) = (ef)b = fb = b,$$

és így

$$b \in aS.$$

Mivel b az S félcsoport tetszőleges eleme, ezért

$$Sa = S.$$

Tehát S minden a eleme esetén $Sa = S$, amiből a 7.2. Tétel miatt az következik, hogy S jobbegyszerű. □

7.18. Tétel *Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerűsítéses jobb egyszerű félcsoport csoport.*

Bizonyítás. Mivel egy jobb egyszerűsítéses jobbzéró félcsoport egyelemű, ezért a tétel állítása a 7.17. Tétel miatt nyílvánvaló. □

7.2. Idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoportok

7.19. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden $\mathcal{L}$-osztálya egy elemet tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport olyan elemei, amelyek esetén

$$S^1a = S^1b.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$a = xb \quad \text{és} \quad b = ya.$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Akkor az $x, y \neq 1$, és így $xy \in S$. Ekkor viszont

$$a = xya,$$

ahol $xy \in S$. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S,$$

s így van olyan $u \in S$ elem, hogy

$$xy = au.$$

Ebből és az előbbi egyenlőségből

$$a = aua,$$

amiből pedig

$$(au)^2 = xyau = au$$

következik. Tehát au az S félcsoport idempotens eleme, ellentmondva az S-re vonatkozó feltételnek. Így $a = b$. Következésképpen S minden $\mathcal{L}$-osztálya egy elemet tartalmaz. □

7.20. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden a és b eleme esetén az $ax = b$ egyenletnek S-ben végtelen sok megoldása van.*

Bizonyítás. Legyen S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Jelölje $M_a \subseteq S$ az $ax = b$ egyenlet megoldásainak (nemüres) halmazát. Mivel $bS = S$ is teljesül, ezért megadható olyan $y \in S$ elem, hogy

$$by = a.$$

Tekintsük a

$$\varphi \ : \ x \ \mapsto xyx$$

leképezést ($x \in M_a$). Az $ax = b$ és $by = a$ egyenlőségekből

$$axy = a,$$

ezen utóbbi egyenlőségből pedig

$$a\varphi(x) = a(xyx) = ax = b$$

adódik. Tehát

$$\varphi(M_a) \subseteq M_a.$$

Az világos, hogy φ-nek nincs fixpontja M_a-ben. Ugyanis, ha valamely $x \in M_a$ elem esetén fennállna az $xyx = x$ egyenlőség, akkor xy az S félcsoport idempotens eleme lenne, ami nem lehet az S-re vonatkozó feltételek miatt. Tetszőleges $x \in M_a$ elemmel képezzük az M elemeiből álló

$$\varphi^{(0)}(x) = x, \varphi^{(1)}(x) = \varphi(x), \dots, \varphi^{(n+1)}(x) = \varphi(\varphi^{(n)}(x)), \dots \tag{7.1}$$

sorozatot. Az világos, hogy

$$\varphi^{(m)}(x) \in xSx$$

minden m pozitív egész számra. Tegyük fel, hogy

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(m)}(x)$$

valamely $n > m$ nemnegatív egész számra. Akkor

$$\varphi^{(m)}(x) = \varphi^{(n)}(x) = \varphi(n-m)(\varphi^{(m)}(x)) \in \varphi^{(m)}(x) S \varphi^{(m)}(x),$$

amiből azt kapjuk, hogy $^{(}\varphi^{(m)}(x))s$ az S félcsoport idempotens eleme valamely $s \in S$ elemmel. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy S-nek nincs idempotens eleme. Tehát a (7.1) sorozat elemei az M_a halmaz páronként különböző elemei. Az M_a halmaz tehát végtelen sok elemet tartalmaz. □

7.21. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden eleme az S végtelen sok különböző fő balideáljának eleme.*

Bizonyítás. Legyen b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport tetszőleges eleme. Rögzített $a \in S$ elem esetén jelölje M_a az $ax = b$ egyenlet összes S-beli megoldásainak halmazát. Az előző tétel miatt M_a végtelen sok elemet tartalmaz. Ha u és v az M_a különböző elemei, akkor

$$b = au \in Su$$

és

$$b = av \in Sv,$$

valamint a 7.19. Tétel szerint $Su \neq Sv$. Így b végtelen sok különböző fő balideál eleme.□

7.22. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden x eleme esetén Sx is idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen $x \in S$ tetszőleges. Az világos, hogy Sx olyan részfélcsoportja S-nek, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyen $a \in Sx$ tetszőleges eleme. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S.$$

Így

$$a(Sx) = (aS)x = Sx.$$

Tehát a 7.2. Tétel szerint Sx jobb egyszerű. □

A továbbiakban azokkal az idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek jobb egszerűsítésesek. Példa ilyen félcsoportra az ún. Baer-Levi félcsoport.

7.3. Baer-Levi félcsoportok

7.23. Definíció *Jelöljenek $p \geq q$ tetszőleges végtelen számosságokat. Egy S félcsoportot (p, q)-típusú Baer-Levi félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan p számosságú A halmaz, hogy S az A halmaz önmagába való mindazon injektív η leképezéseinek félcsoportja (a leképezések kompozíciójára nézve), amelyek esetén az $A \setminus A\eta$ halmaz számossága q.*

7.24. Tétel *Tetszőleges $p \geq q$ számosságok esetén létezik (p, q)-típusú Baer-Levi félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen A egy p számosságú halmaz. Legyenek ξ és η az A önmagába való olyan injektív leképezései, amelyekre az $A \setminus A\xi$ és $A \setminus A\eta$ halmazok számossága q. A tétel bizonyításához meg kell mutatni, hogy az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q. Mivel η injektív, ezért $A \setminus A\xi$-t injektív módon képezi le $A\eta \setminus A\xi\eta$-ra, és így $|A \setminus A\xi| = |A\eta \setminus A\xi\eta|$. Mivel

$$A \setminus A\xi\eta = (A \setminus A\eta) \cup (A\eta \setminus A\xi\eta),$$

és a jobb oldalon álló két diszjunkt halmaz mindegyikének a végtelen q a számossága, ezért az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q. □

7.25. Tétel *Minden Baer-Levi félcsoport idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéses és jobb egyszerű.*

Bizonyítás. Legyen S egy (p, q)-típusú Baer-Levi félcsoport, azaz egy p számosságú A halmaz önmagába való mindazon injektív η leképezéseinek félcsoportja, amelyek esetén az $A \setminus A\eta$ halmaz számossága q. Tetszőleges $\eta \in S$ leképezésre

$$|A \setminus A\eta| = |A\eta \setminus A\eta^2|.$$

A q jelentése miatt

$$\eta^2 \neq \eta.$$

Így az S félcsoportnak nincs idempotens eleme.

A következőkben megmutatjuk, hogy S jobb egyszerű. Legyenek α és β tetszőleges S-beli elemek. Jelölje γ az A halmaz önmagába való olyan leképezését, amely tetszőleges $x \in A$ elem esetén az $x\alpha$ elemhez az $x\beta$ elemet rendeli, az $A \setminus A\alpha$ halmaz elemein pedig a következőképpen hat: mivel $|A \setminus A\alpha| = |A \setminus A\beta| = q$, ezért van az $A \setminus A\alpha$ halmaznak az $A \setminus A\beta$ halmazba olyan δ injektív leképezése, amely esetén az $(A \setminus A\beta) \setminus ((A \setminus A\alpha)\delta)$

halmaz számossága q; tetszőleges $y \in A \setminus A\alpha$ elem esetén legyen $y\gamma = y\delta$. Világos, hogy γ az S egy eleme és

$$\alpha\gamma = \beta.$$

Így

$$\alpha S = S$$

tetszőleges $\alpha \in S$ elem esetén. A 7.2. Tétel szerint S jobb egyszerű félcsoport.

Már csak azt kell megmutatni, hogy S jobb egyszerűsítéses. Tegyük fel, hogy

$$\alpha\beta = \gamma\beta$$

teljesül az S félcsoport valamely α, β, γ elemeire. legyen x az A halmaz tetszőleges eleme. Akkor

$$x\alpha\beta = x\gamma\beta.$$

Mivel β injektív, ezért

$$x\alpha = x\gamma,$$

amiből már következik, hogy

$$\alpha = \gamma.$$

□

7.26. Lemma *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x, y \in S$ esetén $xy \neq y$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$xy = y$$

teljesül valamely $x, y \in S$ elemekre. Mivel S jobb egyszerű, ezért

$$yS = S,$$

és ezért van olyan $z \in S$ elem, hogy

$$yz = x.$$

Ebből viszont

$$x^2 = x(yz) = (xy)z = yz = x$$

következik, azaz x az S félcsoport idempotens eleme. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy S nem tartalmaz idempotens elemet. Tehát igaz a lemma állítása. □

7.27. Lemma *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x \in S$ elem esetén $|S \setminus Sx| = |S|$.*

Bizonyítás. Mivel minden véges félcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet, ezért a feltétel miatt S szükségképpen végtelen számosságú. legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Legyen ϕ az S félcsoport önmagába való azon leképezése, amely tetszőleges $x \in S$ elemhez hozzárendel egyet azon $x' \in S$ elemek közül, amelyekre $xx' = s$ teljesül. Mivel S jobb egyszerű, ezért $xS = S$, s emiatt van legalább egy olyan $x' \in S$ elem, ami az $xx' = s$ feltételnek eleget tesz. Ha

$$\phi(x) = \phi(y),$$

akkor

$$x\phi(x) = s = y\phi(y) = y\phi(x),$$

amiből az S félcsoport jobb egyszerűsíthetősége miatt

$$x = y$$

következik. Tehát a ϕ leképezés injektív. Így

$$|S| = |\phi(S)|.$$

Megmutatjuk, hogy $\phi(S) \cap Ss = \emptyset$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy van S-nek olyan z eleme, amely benne van a $\phi(S) \cap Ss$ halmazban. Akkor

$$z = \phi(x) = ys$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Ekkor viszont

$$s = x\phi(x) = xys,$$

ami ellentmond a 7.26. Lemmának. Így valóban igaz, hogy

$$\phi(S) \cap Ss = \emptyset,$$

és ezért

$$\phi(S) \subseteq S \setminus Ss.$$

Emiatt viszont

$$|S| = |\phi(S)| \leq |S \setminus Ss| \leq |S|,$$

azaz

$$|S \setminus Ss| = |S|$$

adódik. □

7.28. Tétel *Legyen S idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoport. Akkor S-et be lehet ágyazni egy (p,p)-típusú Baer-Levi félcsoportba, ahol $p = |S|$.*

Bizonyítás. Az 5.14. Lemma szerint az S félcsoport kiterjesztett jobbreguláris reprezentációja, azaz az egységelemes S^1 félcsoport reguláris reprezentációjának S-re való leszűkítése az S félcsoport egy hű reprezentációja. Ennél a reprezentációnál az S tetszőleges s eleméhez az S^1 félcsoport s eleméhez tartozó ϱ_s belső jobb transzlációja van hozzárendelve, azaz S^1-nek a

$$\varrho_s : \begin{cases} 1 \mapsto s \\ x \mapsto xs, \;\; x \in S \end{cases}$$

módon definiált önmagába való leképezése. Erre a leképezésre

$$|S^1 \setminus (S^1)\varrho_s| = |S^1 \setminus (s \cup Ss)| = |S \setminus Ss|$$

teljesül, mivel $|S|$ végtelen Így, használva a 7.27. Lemmát is, azt kapjuk, hogy

$$|S^1| = |S| = |S \setminus Ss| = |S^1 \setminus (S^1)\varrho_s|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy ϱ_s eleme annak a (p,p)-típusú Baer-Levi félcsoportnak ($p = |S|$), amely S^1 önmagába való leképezéseiből áll. $\square$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

7.29. Tétel *Egy S félcsoportot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoportba, ha S idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses félcsoport.*

Feladatok

7.1. Feladat *(Megoldás: 17.22.) Mutassuk meg, hogy bal egyszerű félcsoport minden jobb unitér részfélcsoportja bal egyszerű!*

7.2. Feladat *(Megoldás: 17.23.) Mutassuk meg, hogy ha N unitér, H pedig reflexív unitér részfélcsoportja egy S bal egyszerű félcsoportnak, akkor $N \cap H \neq \emptyset$.*

7.3. Feladat *(Megoldás: 17.24.) Mutassuk meg, hogy ha H és N egy S bal egyszerű félcsoport olyan reflexiv, unitér részfélcsoportjai, melyeknek nincs nemtriviális csoport-homomorf képük, akkor $N = H$.*

8. fejezet

Egyszerű és 0-egyszerű félcsoportok

Az egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoport fogalmakat korábban már definiáltuk (4.1. Definíció, 4.6. Definíció). Ebben a fejezetben részletes vizsgálataikkal foglalkozunk.

8.1. Egyszerű félcsoportok

8.1. Tétel *Ha egy S félcsoport előáll minimális jobb oldali ideáljainak uniójaként, akkor S egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoport előáll R_i $(i \in I)$ minimális jobb ideáljainak uniójaként. Legyenek $x \in S$ és $y \in R_i$ tetszőleges elemek $(i \in I)$. Akkor yxS az S olyan jobb oldali ideálja, amelyik benne van az R_i minimális jobb oldali ideálban. Ezért

$$yxS = R_i.$$

Ezért

$$S = \cup_{i \in I} R_i = \cup_{y \in S} yxS = SxS.$$

A 4.2. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy S egyszerű félcsoport. $\square$

A következő részben az egyszerű félcsoportok egy speciális típusával foglalkozunk.

8.2. Croisot-Teissier félcsoportok

Legyenek p és q olyan végtelen számosságok, amelyekre $p \geq q$ teljesül. Legyen A olyan halmaz, melynek számossága nagyobb vagy egyenlő mint p. Legyen $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i : \ i \in I\}$ az A halmazon értelmezett páronként különböző olyan ekvivalenciarelációk halmaza, amelyek szerint vett $A/\mathcal{E}_i$ faktorhalmazok mindegyike p számosságú. Az A halmaz egy B részhalmazáról azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}$ által jól szeparált, ha B számossága p és minden egyes $\mathcal{E}_i$-nek a B-re való $\mathcal{E}_i \cap (B \times B)$ leszűkítése a B identikus relációja, azaz B minden $\mathcal{E}_i$-osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz. Minden $i \in I$ indexre jelölje T_i az A-nak önmagába való mindazon $(\cdot)\eta_i$ leképezéseinek halmazát, amelyekre a következők teljesülnek:

1. $\eta_i \circ \eta_i^{-1} = \mathcal{E}_i$;
2. A-nak valamely, $\mathcal{E}$ által jól szeparált B részhalmaza esetén
   (a) $A\eta_i \subseteq B$ és
   (b) $|B \setminus A\eta_i| = q$.

Megjegyezzük, hogy ha A-nak van $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmaza, akkor a T_i halmaz egyetlen $i \in I$ indexre sem üres.

A következőkben egy ilyen esetre vonatkozó példát ismertetünk. Legyen I tetszőleges nem üres halmaz. Jelöljön E egy végtelen p számosságú halmazt. Jelölje A az E halmaznak önmagával képezett $|I|$-szeres descartes szorzatát, azaz A mindazon kiválasztási függvények halmaza, amelyek minden I-beli i indexhez egy E-beli elemet rendelnek. Tetszőleges $j \in I$ index esetén legyen $\mathcal{E}_j$ az A halmaz következő ekvivalenciarelációja: valamely $a, b \in A$ elem akkor és csak akkor álljon relációban, ha $a(j) = b(j)$. Az világos, hogy

$$|A/\mathcal{E}_j| = |E| = p.$$

Az is igaz, hogy az A halmaz mindazon b elemeinek B halmaza, amelyekre

$$b(i) = b(j)$$

teljesül minden $i, j \in I$ indexre, az A-nak egy, az $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmaza.

Ha az A halmaz tartalmaz $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazt, akkor a fent definiált leképezések $\cup_{i \in I} T_i$ halmazát $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$-val fogjuk jelölni.

8.2. Lemma *$CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan idempotens elem nélküli félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.*

Bizonyítás. Annak bizonyításához, hogy $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan félcsoport, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $i, j \in I$ indexek és tetszőleges $\xi \in T_i$, $\eta \in T_j$ elemek esetén $\xi\eta \in T_i$. Legyenek tehát $i, j \in I$ és $\xi \in T_i$, $\eta \in T_j$ tetszőlegesek. Akkor

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i, \quad \eta \circ \eta^{-1} = \mathcal{E}_j,$$

továbbá megadható A-nak két olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = q$$

teljesülnek. Ezen feltételekből egyrészt

$$(\xi\eta) \circ (\xi\eta)^{-1} = \xi \circ \eta \circ \eta^{-1} \circ \xi^{-1} = \xi \circ \mathcal{E}_j \circ \xi^{-1} = \xi \circ \iota_X \circ \xi^{-1} = \xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i$$

következik. Legyen

$$Z = X\eta.$$

Akkor

$$|Z| = |X| = p,$$

mert X jól szeparált $\mathcal{E}$ által, s ezért η-nak X-re való leszűkítése bijektív. Mivel

$$Z \subseteq A\eta \subseteq Y,$$

azaz Z benne van egy $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazban, valamint $|Z| = p$, ezért Z jól szeparált $\mathcal{E}$ által. Az

$$A\xi \subseteq X$$

tartalmazás miatt

$$A\xi\eta \subseteq X\eta = Z.$$

Az η-nak X-re való leszűkítése bijekció, ezért

$$q = |X \setminus A\xi| = |(X \setminus A\xi)\eta| = |X\eta \setminus A\xi\eta| = |Z \setminus A\xi\eta|.$$

A fentiek együtt azt eredményezik, hogy

$$\xi\eta \in T_i.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoport nem tartalmaz idempotens elemet. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportnak van olyan ξ eleme, amelyre $\xi^2 = \xi$ teljesül. Jelölje X az A halmaz egy olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált részhalmazát, amelyre $A\xi \subseteq X$ és $|X \setminus A\xi| = q$ áll fenn. Mivel ξ-nek X-re való leszűkítése bijekció (a jólszeparálhatóság miatt), ezért

$$|X\xi \setminus A\xi^2| = q.$$

Mivel

$$X\xi \subseteq A\xi,$$

ezért viszont a $\xi^2 = \xi$ feltétel miatt

$$X\xi \setminus A\xi^2 = \emptyset,$$

ami ellentmond az előző eredménynek, mivel q végtelen számosságot jelöl.

8.3. Definíció *A $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportot Croisot-Teissier-féle félcsoportnak nevezzük.*

8.4. Lemma *Egy $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoportban a T_i részhalmaz minden $i \in I$ index esetén minimális jobbideál.*

Bizonyítás. Legyen T_i $(i \in I)$ egy $S = CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ Croisot-Teissier-féle félcsoportot definiáló részhalmazok egyike. T_i a 8.2. Tétel szerint az S félcsoport egy ideálja. Legyenek $\xi, \eta \in T_i$ tetszőleges elemek. Akkor megadható A-nak két olyan, $\mathcal{E}$ által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = p$$

teljesülnek. Definiáljuk A-nak önmagába való ζ leképezését a következőképpen. Először ζ-nak $A\xi$-n való hatását értelmezzük. Tetszőleges $x \in A$ esetén rendelje ζ az $x\xi$ elemhez az $x\eta$ elemet. Mivel

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i = \eta \circ \eta^{-1},$$

ezért ζ jól definiált, egyértékű leképezés. Valójában ζ az $A\xi$ halmaznak az $A\eta$ halmazra való bijekciója. Mivel X jól szeparált $\mathcal{E}$ által és mert $A\xi \subseteq X$, ezért minden $x \in A$ elem esetén X az $x\xi$ osztályából nem tartalmaz más elemet. Ennek az osztálynak minden eleméhez rendelje ζ az $x\eta$ elemet. Jelölje C azon $\mathcal{E}_i$ osztályok halmazát, amelyeknek $A\xi$-vel vett metszete az üres halmaz. Mivel

$$|A/\mathcal{E}_i| = p,$$

ezért

$$|C| \leq p.$$

Mivel q végtelen és

$$|Y \setminus A\eta| = q,$$

ezért megadható C-nek $Y \setminus A\eta$-ba egy olyan δ bijekciója, amelyre

$$|(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$$

teljesül. Válasszunk egy ilyen δ-t, és definiáljuk ζ-t a C halmazhoz tartozó $\mathcal{E}_i$ osztályokon a következőképpen: adott C-hez tartozó $\mathcal{E}_i$ osztály minden eleméhez ζ rendelje hozzá az $Y \setminus A\eta$ halmaz azon elemét, amelyet δ az $\mathcal{E}_i$ osztályhoz rendelt. Az világos, hogy

$$\zeta \circ \zeta^{-1} = \mathcal{E}_i,$$

$$A\zeta \subseteq Y$$

és
$$|Y \setminus A\zeta| = |(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p.$$
Mindezek miatt
$$\zeta \in S = CT(A, \mathcal{E}, p, p).$$
Továbbá az is nyilvánvaló, hogy
$$\xi\zeta = \eta.$$
Az előzőek alapján tehát minden $\xi \in T_i$ elem setén
$$\xi S = T_i.$$
Ebből viszont már adódik, hogy T_i minimális jobbideálja S-nek. □

8.5. Tétel *Minden Croisot-Teissier-féle $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport idempotens elem nélküli egyszerű félcsoport, amely T_i $(i \in I)$ minimális jobbideáljainak uniója.*

Bizonyítás. Legyen $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ tetszőleges Croisot-Teissier-féle félcsoport. A 8.2. Lemma szerint a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport nem tartalmaz idempotens elemet. A 8.4. Lemma szerint a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoportot definiáló T_i $(i \in I)$ részhalmazok a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport minimális jobb oldali ideáljai. Mivel $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ ezen jobb oldali ideálok uniója, ezért a 8.1. Lemma szerint $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ egyszerű félcsoport. □

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

8.6. Tétel *Minden olyan idempotens elem nélküli egyszerű félcsoportot, amely tartalmaz legalább egy minimális jobb ideált, be lehet ágyazni egy Croisot-Teissier-féle félcsoportba.*

8.3. 0-egyszerű félcsoportok

8.7. Lemma *Legyen S olyan 0-egyszerű félcsoport, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali ideált és egy 0-minimális jobb oldali ideált. Akkor S bármely L 0-minimális balideáljához tartozik legalább egy olyan R 0-minimális jobbideál, amelyre $LR \neq \{0\}$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen L a 0-egyszerű S félcsoport tetszőleges balideálja. Mivel LS az S kétoldali ideálja, ezért
$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = S.$$
Ha $LS = \{0\}$, akkor $L^2 = \{0\}$. Mivel ez ellentmond a 4.16. Lemmának, ezért $LS = S$. Így $Lc \neq \{0\}$ valamely $c \in S$ elemre. A 4.20. Lemma duálisa szerint S 0-minimális jobbideálok uniója. Így $c \in R$ az S valamely R 0-minimális jobbideáljára. Így $LR \neq \{0\}$. □

8.8. Lemma *Legyen S egy 0-egyszerű félcsoport. Akkor S tetszőleges L 0-minimális bal oldali ideálja és tetszőleges $a \in L \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = L$.*

Bizonyítás. Mivel Sa az S félcsoport L által tartalmazott bal oldali ideálja, ezért

$$Sa = \{0\} \quad \text{vagy} \quad Sa = L.$$

Mivel S 0-egyszerű, ezért az $a \neq 0$ feltétel miatt

$$SaS = S,$$

felhasználva a 4.7. Tételt is. Emiatt az $Sa = \{0\}$ egyenlőség nem teljesülhet, ellenkező esetben ugyanis azt kapnánk, hogy $S = \{0\}$, ami ellentmondana annak a feltételnek, hogy S 0-egyszerű. Így csak az

$$Sa = L$$

egyenlőség teljesülhet, mint ahogy azt állítottuk. □

8.9. Definíció *Egy S félcsoport valamely $e \neq 0$ idempotens elemét primitív idempotens elemnek nevezzük, ha tetszőleges f idempotens elem esetén az $f \leq e$ (1.39. Megjegyzés) feltételből $f = 0$ vagy $f = e$ következik.*

8.10. Lemma *Legyen S egy 0-egyszerű félcsoport. Legyenek L, illetve R az S félcsoport olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideáljai, amelyekre $LR \neq \{0\}$ teljesül. Akkor érvényesek a következők:*

(1) $LR = S$;

(2) RL olyan félcsoport, amely egy csoportból nullelem adjungálásával származtatható (azaz: nullelemes csoport);

(3) $RL = R \cap L$;

(4) $R = eS$, $L = Se$, $RL = eSe$, ahol e jelöli az $RL \setminus \{0\}$ csoport egységelemét;

(5) Az $RL \setminus \{0\}$ csoport e egységeleme az S egy primitív idempotens eleme.

Bizonyítás. (1) : Mivel LR a 0-egyszerű S félcsoport nem-zéró ideálja, ezért

$$LR = S.$$

(2) : Mivel

$$S = S^2 = LRLR,$$

ezért

$$RL \neq \{0\}.$$

Legyen
$$a \in RL \setminus \{0\}$$
tetszőleges elem. Akkor
$$a \in R \setminus \{0\}.$$
A 8.8. Lemma duálisa miatt
$$aS = R.$$
Mivel
$$S = LR = LaS,$$
ezért
$$La \neq \{0\}.$$
Így La az S félcsoport L által is tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ebből
$$La = L$$
következik, mert L az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. Következésképpen
$$RLa = RL.$$
A 7.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy RL bal 0-egyszerű félcsoport. A 7.7. Tétel miatt $RL \setminus \{0\}$ egy bal egyszerű félcsoport, és RL ebből a 0-elem adjungálásával áll elő. Hasonlóan igazolható, hogy RL jobb nullegyszerű félcsoport és $RL \setminus \{0\}$ jobb egyszerű félcsoport. Mivel egy jobb egyszerű és egyben bal egyszerű félcsoport csoport, ezért az előzőekből már adódik, hogy $RL \setminus \{0\}$ az S egy részcsoportja; ebből RL a 0-elem adjungálásával származtatható.

(3) : Mivel $RL \subseteq R \cap L$ nyilvánvalóan teljesül, csak az $R \cap L \subseteq RL$ tartalmazást mutatjuk meg. Jelölje e az $RL \setminus \{0\}$ csoport egységelemét. A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint $(R \setminus \{0\}) \cap (R \setminus \{0\})$ az S-félcsoport ehy $\mathcal{H}$-osztálya. Ez tartalmazza az e idempotens elemet, s ezért a 4.45. Tétel szerint ez a $\mathcal{H}$-osztály szükségképpen részcsoportja S-nek. Így $R \cap L$ egy nullelemes csoport. Ha $a \in R \cap L$, akkor $a = ae \in RL$, mivel $a \in R$ and $e \in L$. Tehát
$$R \cap L \subseteq RL.$$

(4) : Mivel $e \in L \setminus \{0\}$, ezért a 8.8. Lemma miatt
$$Se = L.$$
Hasonlóan adódik, hogy
$$eS = R.$$
Így
$$RL = eSSe = eSe.$$

(5) : Tegyük fel, hogy f az S olyan idempotens eleme, melyre

$$e \leq f$$

teljesül. Akkor

$$f \in eSe.$$

Mivel (4) szerint

$$eSe = RL$$

RL pedig (2) miatt nullelemes csoport, melynek e az egységeleme, ezért $f = 0$ vagy $f = e$, hiszen nullelemes csoportban csak két idempotens van, a nullelem és az egységelem. Tehát e primitív idempotens. □

Feladatok

8.1. Feladat *(Megoldás: 17.25.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor kommutatív és* 0*-egyszerű, ha egy kommutatív csoportból származtatható egy nullelem adjungálásával.*

8.2. Feladat *(Megoldás: 17.26.) Mutassuk meg, hogy nincs* 0*-egyszerű nil félcsoport.*

9. fejezet

Teljesen egyszerű és teljesen 0-egyszerű félcsoportok

Az előző fejezet második részében vizsgált Croisot-Teissier-féle félcsoportok speciális idempotens elem nélküli egyszerű félcsoportok. Ebben a fejezetben speciális idempotens elemet tartalmazó egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoportokat vizsgálunk.

9.1. Definíció *Egy legalább kételemű egyszerű S félcsoportot [illetve egy 0-egyszerű S félcsoportot] teljesen egyszerűnek [teljesen 0-egyszerűnek] nevezünk, ha tartalmaz egy primitív idempotens elemet. Az egyelemű félcsoportot teljesen egyszerűnek tekintjük.*

9.1. A teljesen 0-egyszerű félcsoportok jellemzései

9.2. Lemma *Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Akkor S tetszőleges e primitív idempotens eleme esetén $L = Se$, illetve $R = eS$ az S félcsoport egy-egy olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideálja, amelyekre teljesül, hogy RL az S olyan részcsoportja, melynek egységeleme e.*

Bizonyítás. A bizonyítás során csak azt fogjuk részletesen igazolni, hogy $R = eS$ az S félcsoport 0-minimális jobb oldali ideálja, mert ehhez hasonlóan igazolható, hogy $L = Se$ az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. Először is megjegyezzük, hogy mivel

$$e = e^2 \in eS = R,$$

ezért

$$R \neq \{0\}.$$

Legyen A az S félcsoport olyan nem-null jobb oldali ideálja, amelyet az R részhalmazként tartalmaz. Jelölje a az A egy tetszőleges elemét. Mivel

$$a \in eS,$$

ezért
$$ea = a.$$
Mivel az S félcsoport 0-egyszerű és $a \neq 0$, ezért
$$SaS = S$$
a 4.7. Tétel szerint, s ezért megadhatók olyan $x', y' \in S$ elemek, hogy
$$x'ay' = e.$$
Bevezetve az
$$x = ex'e \quad \text{és} \quad y = y'e$$
jelöléseket, fennállnak a következő egyenlőségek:
$$xay = e, \quad ex = xe = x, \quad ye = y.$$
Legyen
$$f = ayx.$$
Ekkor
$$\begin{aligned} f^2 &= ay(xay)x = ayex = ayx = f, \\ ef &= (ea)yx = ayx = f, \\ fe &= ay(xe) = ayx = f. \end{aligned}$$
Tehát f az S félcsoport olyan idempotens eleme, amelyre
$$f \leq e$$
teljesül. Mivel
$$e = e^2 = x(ayx)ay = xfay,$$
ezért
$$f \neq 0,$$
amiből
$$e = f$$
következik, hiszen e az S félcsoport primitív idempotens eleme a feltétel szerint. Így viszont
$$e = ayx \in aS,$$
amiből
$$R = eS \subseteq aS^2 \subseteq A$$

következik. Ezért
$$A = R.$$
Tehát R az S félcsoport 0-minimális jobb oldali ideálja.

Mivel $e \neq 0$ és az S félcsoport 0-egyszerű, ezért
$$LR = SeeS = SeS = S \neq \{0\},$$
amiből a 8.10. Lemma szerint az következik, hogy $RL \setminus \{0\}$ az S egy részcsoportja. Mivel
$$0 \neq e \in eSe = eS^2e = eSSe = RL,$$
ezért e az RL egységeleme. □

9.3. Tétel *Egy* 0*-egyszerű félcsoport akkor és csak akkor teljesen* 0*-egyszerű, ha tartalmaz legalább egy* 0*-minimális bal oldali ideált és legalább egy* 0*-minimális jobb oldali ideált.*

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Akkor S tartalmaz legalább egy e primitív idempotens elemet. A 9.2. Lemma szerint $L = Se$ az S félcsoport 0-minimális bal ideálja, $R = eS$ pedig az S egy 0-minimális jobb oldali ideálja.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan 0-egyszerű félcsoport, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideált. Legyen L tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja S-nek. A 8.7. Lemma miatt van olyan R 0-minimális jobbideál S-ben, amelyre
$$LR \neq \{0\}$$
teljesül. A 8.10. Lemma (5) feltétele miatt S tartalmaz egy primitív idempotens elemet, s emiatt S teljesen egyszerű. □

9.4. Következmény *Minden teljesen* 0*-egyszerű félcsoport előáll* 0*-minimális bal [jobb] oldali ideáljainak uniójaként.*

Bizonyítás. Legyen S teljesen 0-egyszerű félcsoport. Az előző tétel miatt S tartalmaz 0-minimális bal oldali és 0-minimális jobb oldali ideált. A 4.20. Tétel miatt S, mint önmaga 0-minimális ideálja előáll 0-minimális bal oldali (hasonlóan, 0-minimális jobb oldali) ideáljainak uniójaként. □

9.5. Definíció *Egy nullelemes* S *félcsoportot* 0*-biegyszerűnek nevezünk, ha tetszőleges nullától különböző* a *és* b *elemei esetén* $(a, b) \in \mathcal{D}$*.*

9.6. Tétel *Minden teljesen* 0*-egyszerű félcsoport* 0*-biegyszerű és reguláris.*

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges nem-zéró elemek. Meg fogjuk mutatni, hogy $a \,\mathcal{D}\, b$. A 9.4. Következmény szerint a benne van S valamelyik L 0-minimális bal oldali ideáljában, b pedig az S valamelyik R 0-minimális jobb oldali ideáljában. A 8.8. Lemma szerint

$$L = Sa \quad \text{és} \quad R = bS.$$

A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint,

$$L_a = L \setminus \{0\} \quad \text{és} \quad R_b = R \setminus \{0\}.$$

A 4.7. Tétel szerint

$$SaS = S = SbS.$$

Így

$$S = S^2 = SbSSaS \subseteq S(bSa)S,$$

és ezért

$$bSa \neq \{0\}.$$

Mivel $a \in L$ és $b \in R$, ezért

$$bSa \subseteq R \cap L,$$

amiből következik, hogy

$$bSa \setminus \{0\} \subseteq R_b \cap L_a,$$

és ezért

$$a \,\mathcal{D}\, b.$$

Tehát az S félcsoport 0-biegyszerű.

Mivel S teljesen 0-egyszerű, ezért $S \setminus \{0\}$ tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel $S \setminus \{0\}$ az S egy $\mathcal{D}$-osztálya, és mert egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel szerint $S \setminus \{0\}$ minden eleme reguláris. Mivel a 0-elem reguláris, ezért S reguláris félcsoport. $\square$

9.7. Tétel *Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport.*

1. *Ha $a \in S$ és $a^2 \neq 0$, akkor $a^2 \in H_a$ és H_a csoport.*

2. *Ha $a, b \in S$ és $ab \neq 0$, akkor $ab \in R_a \cap L_b$.*

3. *Ha $a, b \in S$, akkor $H_a H_b = 0$ vagy $H_a H_b = R_a \cap L_b$; akármelyik eset is áll fenn, mindig igaz, hogy $H_a H_b = H_{ab}$.*

Bizonyítás. (1) Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport és $a \in S$ tetszőleges az $a^2 \neq 0$ feltétellel. A 9.4. Következmény szerint van S-nek olyan 0-minimális L bal oldali ideálja, hogy

$$a \in L.$$

Ekkor persze

$$0 \neq a^2 \in L$$

is teljesül. A 4.41. Tétel szerint $L \setminus \{0\}$ egy $\mathcal{L}$-osztálya S-nek. Mivel $a^2 \neq 0$, és ezért $a \neq 0$, valamint $a, a^2 \in L \setminus \{0\}$, ezért

$$a \mathcal{L} a^2.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$a \mathcal{R} a^2.$$

Következésképpen

$$a \mathcal{H} a^2,$$

amiből a 4.45. Tétel miatt már következik, hogy H_a csoport.

(2) Tekintsük S két olyan a és b elemét, amelyekre

$$ab \neq 0$$

teljesül. A 9.6. Tétel miatt

$$a \mathcal{D} b,$$

és ezért

$$R_b \cap L_a \neq \emptyset.$$

Legyen

$$c \in R_b \cap L_a$$

tetszőleges elem. Akkor

$$c^2 \in L_a R_b.$$

A 4.40. Tétel szerint $L_a R_b$ benne van az S valamely $\mathcal{D}$-osztályában. Mivel a 9.6. Tétel szerint S 0-bisimple, ezért S-nek két $\mathcal{D}$-osztálya van; ezek $\{0\}$ és $S \setminus \{0\}$. Mivel a feltétel szerint $ab \neq 0$, ezért csak

$$L_a R_b \subseteq S \setminus \{0\}$$

tartalmazás lehetséges. Így

$$c^2 \neq 0.$$

Jelen tétel (1) állítása miatt $H_c = R_b \cap L_a$ csoport. A 4.46. Tétel miatt

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

(3) Legyenk a és b tetszőleges S-beli elemek. Ha

$$ab = 0,$$

akkor

$$H_a H_b \subseteq L_a R_b = \{0\},$$

mivel a 4.40. Tétel szerint $L_a R_b$ benne van az S valamely $\mathcal{D}$-osztályában, de S-nek csak két $\mathcal{D}$-osztály van, $\{0\}$ és $S \setminus \{0\}$. Ebből viszont már következik, hogy

$$H_a H_b = \{0\} = H_0 = H_{ab}.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor

$$ab \neq 0.$$

Jelen tétel (2) állítása szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és emiatt (felhasználva a 4.46. Tételt is)

$$H_a H_b = R_a \cap L_b = H_{ab}.$$

□

9.8. Definíció *Egy monoidot (jelölje e az egységelemet) biciklikus félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan $\{a, b\}$ kételemű részhalmaza S-nek, amely generálja S-et az egyetlen $ab = e$ generáló reláció mellett. Jelölése: $C(a, b)$.*

Egy $C(a, b)$ biciklikus félcsoport minden eleme egyértelműen írható $b^m a^n$ alakban (m és n nemnegatív egészek).

9.9. Tétel *Legyenek e, a, b egy S félcsoport olyan elemei, amelyekre $ae = ea = a$, $be = eb = b$, $ab = e$, $ba \neq e$ teljesülnek. Akkor az S félcsoport $\langle a, b\rangle$ részfélcsoportjának minden eleme egyértelműen kifejezhető $b^m a^n$ (m és n nem-negatív egészek) alakban; így $\langle a, b\rangle$ biciklikus félcsoport.*

Bizonyítás. Az világos, hogy az a és b elem által generált $\langle a, b\rangle$ részfélcsoport az S egy olyan részmonoidja, melynek e az egységeleme. Az $ab = e$ feltétel miatt $\langle a, b\rangle$ minden eleme kifejezhető $b^m a^n$ alakban, ahol m és n tetszőleges nem-negatív egész számok (megjegyezzük, hogy $a^0 = b^0 = e$). Már csak azt kell megmutatni, hogy az ilyen alakban való előállítás egyértelmű. Ehhez először megmutatjuk, hogy az a és b elemek rendje szükségképpen végtelen. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a véges rendű. Akkor megadhatók olyan h és k pozitív egész számok, hogy

$$a^{h+k} = a^h.$$

Jobbról szorozva ezt az egyenlőséget b^h-nal, az $ab = e$ feltétel miatt

$$a^k = e$$

adódik. Ekkor viszont

$$b = eb = a^k b = a^{k-1}ab = a^{k-1}e = a^{k-1}$$

és így

$$ba = a^k = e,$$

amely ellentmond a $ba \neq e$ feltételnek. Hasonlóan igazolható, hogy b rendje végtelen.

A bizonyítás következő lépéseként megmutatjuk, hogy az $a^h = b^k$ egyenlőségnek valamely h és k nem-negatív egészekre való teljesüléséből $h = k = 0$ következik. Tegyük fel, hogy

$$a^h = b^k$$

valamely h és k nem-negatív egészekre. Akkor

$$a^{h+k} = a^k b^k = e.$$

A bizonyítás előző része miatt $h + k = 0$, amiből már nyilvánvaló módon következik

$$h = 0,\ k = 0.$$

Speciális esetként előbb megmutatjuk, hogy e egyértelműen áll elő $b^m a^n$ formában, azaz a $b^h a^k = e$ (h és k nemnegatív egészek) egyenlőségből $h = 0$ és $k = 0$ következik. Tegyük fel tehát, hogy

$$e = b^h a^k$$

teljesül valamely h és k nemnegatív egészekkel. Ha $k = 0$, akkor $h = 0$. Megmutatjuk, hogy a $k > 0$ nem teljesülhet. Ugyanis, ha $k > 0$, akkor

$$b = eb = b^h a^k b = b^h a^{k-1},$$

amiből az a elemmel történő jobbról való szorzás után

$$ba = b^h a^k = e$$

adódik, ami ellentmond a $ba \neq e$ feltételnek.

A bizonyítás utolsó lépéseként tegyük fel, hogy

$$b^m a^n = b^i a^j$$

teljesül valamely m, n, i, j nemnegatív egészekkel. Tegyük fel, hogy $i \neq m$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i < m$. Ha megszorozzuk a fenti egyenlőséget balról a^i-vel,

$$b^{m-i} a^n = a^j$$

adódik. Ha $j \geq n$, akkor ezen utóbbi egyenlőségnek b^n-nel jobbról való szorzása után

$$b^{m-i} = a^{j-n}$$

adódik, ami az előzőek miatt nem lehetséges, hiszen a b elem kitevője, $m-i$ pozitív egész, amiről az előző (speciális) bizonyítási részben mutattuk meg, hogy nem lehetséges. Így j és n között csak a $j < n$ nagyságrendi viszony lehetséges. Viszont ez is ellentmondáshoz vezet, hiszen ha a fenti $b^{m-i}a^n = a^j$ egyenlőséget jobbról megszorozzuk a b^j hatvánnyal, akkor

$$b^{m-i}a^{n-j} = e$$

adódik, ami nem lehetséges a fentiek miatt, mert $m - i > 0$. Ezzel a bizonyítást elvégeztük. $\square$

9.10. Tétel *Ha e egy 0-egyszerű, de nem teljesen 0-egyszerű S félcsoportnak valamely nem-zéró idempotens eleme, akkor S tartalmaz olyan biciklikus részfélcsoportot, amelynek e az egységeleme.*

Bizonyítás. Mivel S nem teljesen 0-egyszerű, ezért az e idempotens elem nem primitív. Így van S-nek olyan nem-zéró f idempotens eleme, amelyre $f < e$ teljesül. Ezért

$$ef = fe = f$$

és

$$e \neq f.$$

Mivel $f \neq 0$ és S 0-egyszerű, ezért

$$SfS = S,$$

és ezért megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$xfy = e.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$u = exf, \quad v = fye.$$

Akkor

$$eu = uf = u, \quad fv = ve = v, \quad uv = e.$$

Legyen

$$g = vu.$$

Akkor

$$g^2 = vuvu = veu = vu = g,$$

$$fg = fvu = vu = g,$$
$$gf = vuf = vu = g.$$

Így g az S félcsoport olyan idempotens eleme, amelyre

$$g \leq f$$

teljesül. Mivel $f < e$, ezért

$$g < e.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az S félcsoportnak van két olyan eleme, u és v, amelyekre

$$uv = e$$

és

$$vu \neq e,$$

továbbá

$$ue = u = eu, \quad ve = v = ev$$

teljesülnek. Akkor viszont a 9.9. Tétel szerint $\langle u, v\rangle$ az S félcsoport olyan biciklikus részfélcsoportja, amelynek e az egységeleme. □

9.11. Tétel *Egy* 0*-egyszerű* S *félcsoport akkor és csak akkor teljesen* 0*-egyszerű, ha minden elemének valamely hatványa benne van* S *valamely részcsoportjában.*

Bizonyítás. Ha S teljesen 0-egyszerű félcsoport, akkor a 9.7. Tétel szerint S minden eleme benne van S egy részcsoportjában. Ugyanis, ha a az S tetszőleges eleme, akkor vagy $a^2 = 0$ vagy pedig H_a az S egy részcsoportja. Mivel $\{0\}$ egyelemű részcsoportja S-nek, ezért az $a^2 = 0$ esetben is igaz, hogy a valamelyik hatványa a^2 benne van S valamelyik részcsoportjában.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan 0-egyszerű félcsoport, amelyben bármely elem valamelyik hatványa benne van S egy részcsoportjában. Először megmutatjuk, hogy S-nek van nem-nilpotens eleme. Legyen $0 \neq a \in S$ tetszőleges elem. Akkor a 4.7. Tétel szerint

$$a \in SaS,$$

és így

$$a = xay$$

valamely $x, y \in S$ elemekkel. Ekkor viszont

$$a = x^n a y^n$$

is teljesül tetszőleges n pozitív egész számra. Mivel $a \neq 0$, ezért pl. $x^n \neq 0$ minden n pozitív egész számra, és így x nem nilpotens elem. A feltétel szerint x valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában; ennek a részcsoportnak az egységeleme nem egyenlő az S nullelemével. Akkor viszont S-nek van nem-zéró e idempotens eleme. Ha S nem lenne teljesen 0-egyszerű, akkor a 9.10. Tétel szerint S tartalmazna egy $\langle u, v\rangle$ biciklikus részfélcsoportot e egységelemmel ($uv = e$, $vu \neq e$). Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet. A feltétel szerint van olyan n pozitív egész szám, amelyre u^n benne van S valamely részcsoportjában. Jelölje f ennek a részcsoportnak az egységelemét, valamint x a p^n elem inverzét ebben a részcsoportban. Mivel

$$u^n v^n = e,$$

ezért

$$fe = fu^n v^n = u^n v^n = e.$$

Mivel

$$xu^n = f,$$

ezért

$$fe = xu^n e == xu^n = f.$$

A két egyenlőségből

$$e = f$$

adódik, és így

$$v^n = ev^n = fv^n = xv^n v^n = xe = xf = x.$$

Akkor viszont

$$v^n u^n = xu^n = f = e,$$

ami viszont ellentmond annak, hogy a $\langle u, v\rangle$ biciklikus részfélcsoport. □

9.12. Következmény *Minden periodikus* 0*-egyszerű félcsoport teljesen* 0*-egyszerű.*

Bizonyítás. Az 1.33. Tétel szerint periodikus S félcsoport minden elemének valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában. Így a tétel állítása következik a 9.11. Tételből. □

9.13. Tétel *Minden véges* 0*-egyszerű félcsoport teljesen* 0*-egyszerű.*

Bizonyítás. Mivel minden véges félcsoport periodikus, az állítás a 9.12. Tétel miatt nyilvánvaló. □

9.2. Rees-féle mátrixfélcsoportok, a Rees-tétel

Legyen G egy csoport. Jelölje G^0 (a korábbiaknak megfelelően) azt a félcsoportot, amelyet a G csoportból úgy származtatunk, hogy ahhoz egy nullelemet adjungálunk. Legyen X egy tetszőleges nem üres halmaz, és legyen $i \mapsto a_i$ X-nek G^0-ba való leképezése. Ha $a_i = 0$ minden $i \in X$ indexre, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő a 0 elemmel. Ha $a_j \neq 0$ valamely $j \in X$ indexre, de az összes többi $i \in X$ indexre $a_i = 0$, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget szintén definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő az a_j elemmel. Ha $a_j \neq 0$ és $a_k \neq 0$ teljesül valamely $j \neq k$ indexekre, akkor a $\Sigma_{i \in X} a_i$ összeget nem definiáljuk.

Legyenek I és Λ tetszőleges nem üres halmazok. A G^0 feletti $I \times \Lambda$ típusú mátrixot Rees-mátrixnak nevezzük, ha legfeljebb egy olyan eleme van, amely nem egyenlő a 0 elemmel. Ha ez az elem a G csoport a eleme, amely a mátrixban az i-dik sorban, illetve a j-dik oszlopban áll (azaz az (i, j) rendezett párhoz van hozzárendelve), akkor a mátrixot $(a)_{ij}$ módon is fogjuk jelölni. A $(0)_{ij}$ kifejezést is fogjuk használni; ez tetszőleges $i \in I$ és $j \in \Lambda$ index esetén azt az $I \times \Lambda$-típusú Rees-mátrixot fogja jelölni, amelynek minden eleme a 0 elemmel egyenlő, azaz az $I \times \Lambda$ típusú nullmátrixról van szó.

Legyen $P = (p_{\lambda i})$ egy G^0 feletti tetszőleges $\Lambda \times I$ típusú mátrix (vagyis nem feltétlenül egy Rees-mátrix). A továbbiakban ezt a mátrixot szendvicsmátrixnak fogjuk nevezni. Ha $(a)_{ij}$ és $(b)_{rt}$ tetszőleges $I \times \Lambda$-típusú Rees-mátrixok, akkor a fenti végtelen összeg definíciója és a mátrixok szokásos szorzásának definíciója alapján értelmezve van az $(a)_{ij} P (b)_{rt}$ mátrixszorzat. Könnyen belátható, hogy ez a szorzat megegyezik az $(a p_{jr} b)_{it}$ Rees-mátrixszal.

9.14. Lemma *Egy G^0 nullelemes csoport feletti tetszőleges $I \times \Lambda$ típusú Rees-mátrixok tetszőleges rögzített $\Lambda \times I$-típusú P szendvicsmátrix esetén egy $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ módon jelölt félcsoportot alkotnak az $(a)_{ij} \circ (b)_{rt} = (a)_{ij} P (b)_{rt} = (a p_{jr} b)_{it}$ módon definiált műveletre nézve.*

Bizonyítás. A lemma előtti megjegyzés alapján nyilvánvaló. □

9.15. Definíció *Az előző lemmában szereplő $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ félcsoportot (a G^0 nullelemes csoport feletti $I \times \Lambda$-típusú, P szendvicsmátrixú) Rees-féle mátrixfélcsoportnak nevezzük.*

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt ([5]):

9.16. Tétel *Ugyanazon G csoport feletti, $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ Rees-féle mátrixfélcsoportok izomorfak, ha létezik I-nek G-be egy $i \mapsto u_i$, valamint Λ-nak G-be egy $\lambda \mapsto v_\lambda$ leképezése úgy, hogy $p'_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$ minden $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ indexre teljesül, ahol $P = (p_{\lambda i})$ és $P' = (p'_{\lambda i})$.*

9.17. Definíció *Egy P szendvicsmátrixot regulárisnak nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában van legalább egy nem nulla elem.*

9.18. Tétel *Egy $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha a P szendvicsmátrix reguláris.*

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy G^0 0-elemes csoport feletti $P = (p_{\lambda i})$ szendvicsmátrixú Rees-féle mátrixfélcsoport. Legyenek $a, b \in G$; $i, j \in I$; $\lambda, \mu \in \Lambda$ tetszőleges elemek. Akkor

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (ap_{\lambda j}bp_{\mu i}a)_{i\lambda}.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor egyenlő az $(a)_{i\lambda}$ elemmel, ha

$$p_{\lambda j}bp_{\mu i} = a^{-1}.$$

Adott $(a)_{i\lambda}$ elemhez akkor és csak akkor létezik ilyen $(b)_{j\mu}$ elem, ha $p_{\lambda j} \neq 0$ és $p_{\mu i} \neq 0$ teljesül valamely $j \in I$ és $\mu \in \Lambda$ indexekre; ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a P szendvicsmátrix λ-adik sora és i-dik oszlopa is tartalmaz egy-egy G-beli (nem-nulla) elemet. Ebből már következik a tétel állítása. □

9.19. Definíció *Ha egy G^0 feletti $\Lambda \times I$-típusú reguláris $P = (p_{\lambda i})$ szendvicsmátrix esetén megadható olyan $\lambda_0 \in \Lambda$ és $i_0 \in I$ index, hogy minden $i \in I$ és minden $\lambda \in \Lambda$ esetén a $p_{\lambda i_0}$ és $p_{\lambda_0 i}$ elemek mindegyike vagy nulla vagy megegyezik a G csoport egységeleméve, akkor azt mondjuk, hogy a P szendvicsmátrix normált.*

9.20. Lemma *Minden reguláris $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport izomorf egy olyan $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ mátrixfélcsoporttal, amelyben szereplő P' szendvicsmátrix normált.*

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy Rees-féle mátrixfélcsoport. A 9.16. Tételben szereplő jelöléseket használva, legyen u_i ($i \in I$) a $p_{\lambda_0 i} \in G$ elem inverze, ha $p_{\lambda_0 i} \neq 0$, egyébként pedig legyen $u_i = e$ (e a G egységeleme); legyen továbbá $v_\lambda = e$ minden $\lambda \in \Lambda$ indexre. Legyen $Q = (q_{\lambda i})$ az a G^0 feletti $\Lambda \times I$-típusú mátrix, melyben $q_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$. Ebben a mátrixban $q_{\lambda_0 i} = p_{\lambda_0 i}(p_{\lambda_0 i})^{-1} = e$ vagy $q_{\lambda_0 i} = 0$, az u_i-től függően. A 9.16. Tétel szerint $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ egymással izomorfak. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazzuk Q-ra, valamely rögzitett $i_0 \in I$ indexre, kapunk egy olyan G^0 feletti $\Lambda \times I$-típusú P' mátrixot, amely normált, valamint $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ egymással izomorfak. Ebből már következik a lemma állítása. □

9.21. Tétel *Legyen S egy Rees-féle mátrixfélcsoport. Akkor a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S 0-egyszerű.*

2. S reguláris.

3. S teljesen 0-egyszerű.

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy Rees-féle mátrixfélcsoport. Tegyük fel, hogy S nem reguláris. Akkor a 9.18. Tétel szerint a P szendvicsmátrixnak van olyan sora vagy oszlopa, amelyben minden elem a nulla. Tegyük fel, hogy az i-dik oszlopra igaz az, hogy abban minden elem nulla. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$R_i^0 = \{(a)_{i\lambda} :\ a \in G,\ \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$$

az S félcsoport nem-zéró nilpotens ideálja. Az az eset, amikor a P szendvicsmátrix λ-adik sora csupa nulla, hasonlóan kezelhető. Ebből az következik, hogy S nem 0-egyszerű. Tehát (1) implikálja (2)-t.

Tegyük fel, hogy S reguláris. Legyenek $(a)_{i\lambda}$ és $(b)_{j\mu}$ az S félcsoport tetszőleges elemei, ahol $a \neq 0$. A 9.18. Tétel szerint a P szendvicsmátrix i-dik oszlop-ban, illetve λ-dik sorában vannak olyan elemek, pl. $p_{\mu i}$ és $p_{\lambda v}$ elemek, amelyek nem egyenlők a nullelemmel. Legyen

$$c = b(p_{\mu i} a p_{\lambda v})^{-1}.$$

Jelölje e a G csoport egységelemét. Akkor

$$(c)_{j\mu}(a)_{i\lambda}(e)_{v\mu} = (b)_{j\mu},$$

és így

$$S(a)_{ij}S = S.$$

A 4.7. Tétel alapján ebből az következik, hogy S 0-egyszerű félcsoport. Tehát a (2) feltételből következik az (1) feltétel. Ez a bizonyítás előző részével együtt azt eredményezi, hogy az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

A (3) feltételből következik az (1) és így a (2) feltétel. Elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (2) feltételből következik a (3) feltétel. Tegyük fel tehát, hogy S reguláris. Könnyen belátható, hogy S nem-zéró idempotens elemei pontosan az

$$\epsilon_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$$

mátrixok. Mivel P reguláris, ezért S-nek van nem-zéró idempotens eleme. Legyenek $\epsilon_{i\lambda}$ és $\epsilon_{j\mu}$ az S olyan nem-zéró idempotens elemei, amelyekre

$$\epsilon_{i\lambda}\epsilon_{j\mu} = \epsilon_{j\mu}e_{i\lambda} = \epsilon_{j\mu}$$

teljesül. Akkor

$$(p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1})_{j\lambda} = (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu},$$

amiből
$$i = j \quad \text{és} \quad \lambda = \mu$$
és így
$$e_{i\lambda} = e_{j\mu}$$
következik. Következésképpen S minden nem-zéró idempotens eleme primitív. Tehát S teljesen 0-egyszerű. Így a (3) feltétel teljesül. □

A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet Rees-féle félcsoportot konstruálni egy S félcsoport olyan $\mathcal{D}$-osztálya segítségével, amely osztálynak minden eleme reguláris.

Legyen D egy S félcsoport reguláris $\mathcal{D}$-osztálya. Jelölje
$$\{R_i : \ i \in I\}$$
és
$$\{L_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$$
az S félcsoport D által tartalmazott $\mathcal{R}$-osztályainak, illetve $\mathcal{L}$-osztályainak halmazát. A D által tartalmazott $\mathcal{H}$-osztályok halmaza
$$\{H_{i\lambda} : \ i \in I, \lambda \in \Lambda\},$$
ahol
$$H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda.$$
A 6.8. Tétel szerint D tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Jelöljön e egy D-beli idempotens elemet. Jelölje H_{11} az e-t tartalmazó $\mathcal{H}$-osztályt, valamint R_1, illetve L_1 az R_e, illetve L_e osztályokat; ezzel persze feltettük, hogy 1 az I-nek és a Λ-nek is eleme, de ez nem fog problémát okozni a továbbiakban. A 9.7. Tétel szerint H_{11} részcsoportja S-nek.

Tetszőleges $i \in I$, illetve tetszőleges $\lambda \in \Lambda$ indexekhez válasszunk ki egy
$$r_i \in H_{i1},$$
illetve egy
$$q_\lambda \in H_{1\lambda}$$
elemet. Ezek segítségével definiáljunk a H_{11}^0 nullelemes csoport feletti $\Lambda \times I$-típusú $P = (p_{\lambda i})$ mátrixot a következőképpen:
$$p_{\lambda i} = \begin{cases} q_\lambda r_i, & \text{ha } q_\lambda r_i \in H_{11}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ennek a mátrixnak a segítségével képezzük az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoportot. A 4.46. Tétel szerint $q_\lambda r_i \in H_{11}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H_{i\lambda}$ tartalmaz egy idempotens elemet. A 6.8. Tétel szerint tetszőleges $\lambda \in \Lambda$ index esetén L_λ tartalmaz egy idempotens elemet. Ez az idempotens elem benne van valamelyik R_i osztályban, és így benne van a $H_{i\lambda}$ osztályban. Az előbb említettek miatt ez azt jelenti, hogy aP mátrix λ-adik sorában tetszőleges λ esetén mindig van legalább egy nem nulla elem. Hasonló igaz az oszlopokra is. Tehát a P mátrix reguláris. A 9.18. Tétel szerint az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport reguláris, s ezért a 9.21. Tétel miatt $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ teljesen 0-egyszerű.

Az előzőekben definiált $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport konstrukciójában szereplő H_{11} részcsoport és az $r_i \in H_{i1}$, illetve $q_\lambda \in H_{1\lambda}$ elemek másképp való választásával más-más Rees-féle mátrixfélcsoportot kapunk. Megmutatható viszont, hogy ezek egymással izomorfak. Valójában azt fogjuk megmutatni, hogy mindegyikük izomorf a D osztály által a 4.47. Lemma előtt definiált $(T; *)$ félcsoporttal.

9.22. Tétel *Legyen D egy S félcsoport reguláris $\mathcal{D}$-osztálya, H_{11} a D egy részcsoportja és $r_i \in H_{i1}$, illetve $q_\lambda \in H_{1\lambda}$ tetszőleges elemek. Akkor D minden eleme egyértelműen kifejezhető $r_i a q_j$ ($a \in H_{11}$) alakban. Továbbá*

$$\phi((a)_{i\lambda}) = \begin{cases} r_i a q_\lambda, & ha\ a \neq 0, \\ 0, & ha\ a = 0 \end{cases}$$

az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoportnak a D osztály segítségével definiált 4.47. Lemmában szereplő $(T; *)$ félcsoportra való izomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \Lambda$ tetszőleges. A 6.8. Tétel szerint a D által tartalmazott $\mathcal{R}$-osztályok, illetve $\mathcal{L}$-osztályok mindegyike tartalmaz idempotens elemet, ezért L_λ-ban is van idempotens elem; jelölje e_λ ezek egyikét. Legyen $k \in I$ az az index, amelyre

$$e_\lambda \in R_k$$

teljesül. Ekkor

$$e_\lambda \in H_{k\lambda}.$$

Legyen b a $H_{k1} = R_k \cap L_1$ $\mathcal{H}$-osztály tetszőleges eleme. A 6.11. Tétel (2) állítása szerint ez a $\mathcal{H}$-osztály akkor és csak akkor tartalmazza a $H_{1\lambda} = R_1 \cap L_\lambda$ korábban már kiválasztott q_λ elem valamely inverzét, ha $R_{q_\lambda} \cap L_b = R_1 \cap L_1 = H_{11}$ és $R_b \cap L_{q_\lambda} = R_k \cap L_\lambda = H_{k\lambda}$ mindegyike tartalmaz idempotens elemet. Mivel H_{11} részcsoport és az e_λ idempotens elem a $H_{k\lambda}$ egy eleme, ezért $H_{k1} = R_k \cap L_1$ tartalmazza q_λ egy inverzét, mégpedig a 6.11. Tétel (3) állítása szerint pontosan egy inverzét. Jelölje q'_λ ezt az inverzet, e pedig a H_{11} csoport egységelemét. A 4.42. Tétel szerint e bal oldali egységeleme az $R_e = R_1 = R_{q_\lambda}$ osztálynak és így

$$eq_\lambda = q_\lambda.$$

Mivel $H_{k\lambda} = R_k \cap L_\lambda = R_{q'_\lambda} \cap L_{q_\lambda}$ tartalmazza az e_λ idempotens elemet, ezért a 4.46. Tétel szerint

$$q_\lambda q'_\lambda \in R_{q_\lambda} \cap L_{q'_\lambda} = R_1 \cap L_1 = H_{11},$$

és így

$$q_\lambda q'_\lambda = e,$$

mert $q_\lambda q'_\lambda$ idempotens eleme az e egységelemes H_{11} csoportnak (csoportnak viszont pontosan egy idempotens eleme van). Legyen $s = q_\lambda$ és $s' = q'_\lambda$. Akkor $es = q_\lambda$ és $q_\lambda s' = e$, mivel $eq_\lambda = q_\lambda$ és $q_\lambda q'_\lambda 7e$. A 4.38. Tétel szerint az

$$x \ \mapsto xq_\lambda \ (x \in L_1) \quad \text{és} \quad y \ \mapsto yq'_\lambda \ (y \in L_\lambda)$$

L_1-nek L_λ-ra, illetve L_λ-nak L_1-re való olyan kölcsönösen egyértelmű, $\mathcal{R}$-osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei.

Az előzőekhez hasonlóan, minden $i \in I$ indexhez van a korábban már kiválasztott $r_i \in H_{i1} = R_i \cap L_1$ elemnek R_1-ben van olyan r'_i inverze, hogy az

$$x \ \mapsto r_i x \ (x \in R_1) \quad \text{és} \quad y \ \mapsto r'_i y \ (y \in R_i)$$

leképezések $\mathcal{L}$-osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezések, amelyek egymás inverzei. A 4.39. Tétel szerint

$$x \ \mapsto r_i x q_\lambda \ (x \in H_{11}) \quad \text{és} \quad y \ \mapsto r'_i y q'_\lambda \ (y \in H_{i\lambda})$$

minden $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ indexre H_{11}-nek $H_{i\lambda}$-ra, illetve $H_{i\lambda}$-nak H_{11}-re való olyan kölcsönösen egyértelmű leképezései, amelyek egymás inverzei. Mivel minden D-beli elem pontosan egy $H_{i\lambda}$ osztálynak eleme, ezért a tételben definiált ϕ leképezés $\mathcal{M}^0$-nak T-re való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Ebből pedig már következik, hogy D minden eleme előáll a tételben megfogalmazott szorzatalakban egyértelműen.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy ϕ művelettartó. Legyenek $a, b \in H_{11}$, $i, j \in I$ és $\lambda, \mu \in \Lambda$ tetszőleges elemek. Mivel

$$\phi((a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}) = \phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu})$$

és

$$\phi((a)_{i\lambda}) * \phi((b)_{j\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu),$$

ezért azt kell megmutatni, hogy

$$\phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu).$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$p_{\lambda j} = 0.$$

Ekkor
$$\phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu}) = \phi(0) = 0.$$
Tehát elegendő azt megmutatni, hogy
$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$
a $(T;*)$ félcsoportban. Mivel $p_{\lambda j} = 0$, ezért a P szendvicsmátrix definíciója alapján
$$q_\lambda r_j \notin H_{11},$$
és ezért a a 4.46. Tétel szerint $H_{j\lambda}$ nem tartalmaz idempotens elemet. Mivel
$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$
ezért a 4.46. Tétel miatt
$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \notin H_{i\mu},$$
és ezért a T-n értelmezett $*$ művelet definíciója szerint
$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$
$(T;*)$ félcsoportban.

A bizonyítás hátralévő részében vizsgáljuk a
$$p_{\lambda j} \neq 0$$
esetet. Ekkor
$$q_\lambda r_j \in H_{11},$$
és ezért a a 4.46. Tétel szerint $H_{j\lambda}$ tartalmaz idempotens elemet. Mivel
$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$
Ezért a 4.46. Tétel miatt
$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \in H_{i\mu},$$
és ezért a T-n értelmezett $*$ művelet definíciója szerint
$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = (r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu) = (r_i a p_{\lambda j} b q_\mu) = \phi((a p_{\lambda j} b)).$$
Tehát mindkét esetben
$$\phi((a p_{\lambda j} b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu). \qquad \square$$

A következőkben a teljesen 0-egyszerű félcsoportokat jellemezzük a Ress-féle mátrix-félcsoportok segítségével.

Először bebizonyítjuk a következő tételt:

9.23. Tétel *Legyen S teljesen 0-egyszerű félcsoport, és jelölje D az S félcsoport 0-elemet nem tartalmazó (egyetlen) $\mathcal{D}$-osztályát. Akkor ezen $\mathcal{D}$-osztállyal megszerkesztett, közvetlenül a 4.47. Lemma előtt definiált $(T;*)$ félcsoport izomorf az S félcsoporttal.*

Bizonyítás. A 9.6. Tétel miatt az S félcsoport 0-biegyszerű, azaz S-nek két $\mathcal{D}$-osztálya van: $\{0\}$ és $D = S\setminus\{0\}$. Így tulajdonképpen az S alaphalmaz azonosítható a $T = D\cup\{0\}$ halmazzal. Már csak azt kellene belátni, hogy tetszőleges $a, b \in S = T$ elemek esetén $ab = a * b$. Legyenek $a, b \in S = T$ tetszőleges elemek. Ha

$$ab \neq 0,$$

akkor a 9.7. Tétel szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és így a $*$ művelet definíciója alapján

$$ab = a * b.$$

Ha

$$ab = 0,$$

akkor viszont

$$ab \notin R_a \cap R_b,$$

és ezért a $*$ művelet definíciója alapján

$$a * b = 0 = ab.$$

Tehát az $S = T$ halmazon az S-beli eredeti művelet megegyezik a $*$ művelettel. □

Ezek után megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a fejezet főtételét.

9.24. Tétel *(**Rees-tétel**) Egy félcsoport akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha izomorf egy nullelemes csoport feletti reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporttal.*

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoport, amely izomorf egy $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporttal. Akkor a 9.21. Tétel szerint S teljesen 0-egyszerű.

Fordítva, legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. A 9.6. Tétel szerint S egy 0-biegyszerű félcsoport, és így

$$S = D \cup \{0\},$$

ahol D az S félcsoport $\mathcal{D}$-osztálya. Mivel S teljesen 0-egyszerű, ezért D tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Mivel egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel miatt D minden eleme reguláris. Így megkonstruálhatunk D segítségével egy, az előzőekben tekintett $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoportot és a vele izomorf $(T;*)$ félcsoportot. A 9.23. Tétel szerint az S félcsoport izomorf a $(T;*)$ félcsoporttal. Így S izomorf az $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal. □

9.25. Megjegyzés *A Rees-féle mátrixfélcsoportoknak van egy másik fajta megközelítése. Egy G^0 nullelemes csoport, valamint I és Λ nem üres halmazok $G^0 \times I \times \Lambda$ Descartes-szorzatán értelmezzünk egy $*$ műveletet a következőképpen. Képezzünk a G^0 elemeiből egy $\Lambda \times I$ típusú $P = (p_{\lambda i})$ mátrixot, majd ennek felhasználásával tetszőleges $(g; i, \lambda)$ és $(h; j, \mu)$ elemhármas esetén legyen*

$$(g, i, \lambda) * (h, j, \mu) = (gp_{j\lambda}h, i, \mu).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $*$ művelet asszociatív. Az $S = (G^0 \times I \times \Lambda; *)$ félcsoportban a $(0, i, \lambda)$ alakú elemek egy ideált alkotnak; az S félcsoportnak ezen ideál szerinti Rees-féle faktorfélcsoportja izomorf az $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal.

9.3. Teljesen egyszerű félcsoportok

A 4.8. Megjegyzés szerint, ha egy teljesen egyszerű félcsoporthoz egy nullelemet adjungálunk, akkor egy teljesen nullegyszerű félcsoportot kapunk. Továbbá, ha egy teljesen nullegyszerű félcsoportban nincs nullától különböző nullosztó, akkor a 0-elem elhagyásával egy teljesen egyszerű félcsoport keletkezik. Egy $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoportban akkor és csak akkor nincs nullától különböző nullosztó, ha a P szendvicsmátrix egyetlen eleme sem nulla. Ha ez a helyzet, akkor az $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ félcsoportból a nullelem elhagyásával keletkezett félcsoport izomorf egy olyan $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$ módon jelölt félcsoporttal, amelynek alaphalmaza a $G \times I \times \Lambda$ halmaz, a művelet pedig a következőképpen van értelmezve:

$$(g; i, \lambda)(h; j, \mu) = (gp_{\lambda j}h; i, \mu).$$

9.26. Definíció *Egy G csoport elemeiből képezett $\Lambda \times I$ típusú P mátrixszal megkonstruált $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$ félcsoportot a G csoport feletti, P szendvicsmátrixú, $I \times \Lambda$-típusú Rees-féle mátrixfélcsoportnak nevezzük.*

Az előző megjegyzés, valamint a Rees-tétel alapján kimondható a következő tétel.

9.27. Tétel *Egy félcsoport akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha izomorf egy csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporttal.*

9.28. Tétel *Minden teljesen egyszerű félcsoport gyengén reduktív.*

Bizonyítás. Legyen S teljesen egyszerű félcsoport. Akkor a 9.27. Tétel szerint S izomorf egy G csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporttal. Jelölje $(a, i, \lambda); (b, j, \mu)$ az S két tetszőleges elemét. Tegyük fel, hogy

$$(a, i, \lambda)(x, t, \tau) = (b, j, \mu)(x, t, \tau)$$

és

$$(x,t,\tau)(a,i,\lambda)=(x,t,\tau)(b,j,\mu)$$

teljesül az S félcsoport minden (x,t,τ) elemére. Ekkor

$$(ap_{\lambda t}x,i,\tau)=(bp_{\mu t}x,j,\tau)$$

és

$$(xp_{\tau i}a,t,\lambda)=(xp_{\tau j}b,t,\mu),$$

amiből

$$i=j,\quad \lambda=\mu$$

valamint

$$ap_{\mu t}x=ap_{\lambda t}x=bp_{\mu t}x$$

következik. Mivel a, b, x és $p_{\mu t}$ a G csoport elemei, ezért az utolsó egyenlőségből

$$a=b$$

következik. Tehát

$$(a,i,\lambda)=(b,j,\mu).$$

Következésképpen S gyengén reduktív. □

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

9.29. Tétel *Legyen $S=\mathcal{M}(G;I,J;P)$ egy $P=(p_{j,i})$ szendvicsmátrixú G csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoport (azaz, S egy teljesen egyszerű félcsoport). Jelölje $\mathcal{T}_I$, illetve $\mathcal{T}_J$ az I (balról ható), illetve J (jobbról ható) összes transzformációinak félcsoportját. Akkor*

$$\Omega(S)=\{(k,a,h)\in\mathcal{T}_I\times G\times\mathcal{T}_J:\ (\forall i\in I,j\in J)\ p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i}=p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az $\Omega(S)$ tetszőleges (k,a,h) és (f,b,g) elemeinek szorzata a következő:

$$(k,a,h)(f,b,g)=(k\circ f,ap_{(j_0)h,f(i_0)}b,h\circ g).$$

Egy $(k,a,h)\in\Omega(S)$ elem akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha k and h konstans transzformációk. Azonosítva S-et $\Omega(S)$ belső részével, tetszőleges $(k,a,h)\in\Omega(S)$ és $(g;i,j)\in S$ elemek esetén

$$(k,a,h)(g;i,j)=(ap_{k(j_0),i}g;k(i),j),$$

$$(g;i,j)(k,a,h)=(gp_{j,(i_0)h}a;i,(j)h).$$

9.4. Brandt-félcsoportok

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (5.3. Definíció), egy nem üres A halmaz esetén az $A \times A$ halmaz valamely nem üres részhalmazának A-ba való egyértelmű leképezését az A halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halmazt parciális gruppoidnak nevezünk.

9.30. Definíció *Brandt-gruppoidon olyan B parciális gruppoidot értünk, amelyre teljesülnek az alábbiak:*

(B1) Ha $ab = c$ $(a, b, c \in B)$ akkor a három elem bármelyike egyértelműen meg van határozva a másik kettő által.

(B2) B tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:

- *(1) Ha ab és bc definiálva vannak, akkor $(ab)c$ és $a(bc)$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*
- *(2) Ha ab és $(ab)c$ definiálva vannak, akkor bc és $a(bc)$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*
- *(3) Ha bc és $a(bc)$ definiálva vannak, akkor ab és $(ab)c$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*

(B3) B tetszőleges a eleméhez egyértelműen léteznek olyan B-beli e, f és a' elemek, amelyekre $ea = af = a$ és $a'a = f$ teljesülnek.

(B4) Ha e és f B-nek olyan elemei, amelyekre $e^2 = e$, illetve $f^2 = f$ teljesül, akkor létezik olyan B-beli a elem, hogy $ea = af = a$.

9.31. Lemma *Legyen B egy parciális gruppoid. Jelöljön 0 egy olyan szimbólumot, amely nem reprezentál egyetlen B-beli elemet sem. Az $S = B^0 = B \cup \{0\}$ halmazon definiáljunk egy $\circ$ műveletet a következőképpen $(a, b \in B)$:*

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \text{ definiálva van } B\text{-ben,} \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

továbbá

$$a \circ 0 = 0 \circ a = 0 \circ 0 = 0.$$

$S = B^0$ akkor és csak akkor alkot félcsoportot a $\circ$ műveletre nézve, ha B teljesíti a 9.30. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy B parciális gruppoid teljesíti a 9.30. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit. Legyenek

$$a, b, c \in S^0$$

tetszőleges elemek. Ha ezen elemek valamelyike egyenlő a 0 elemmel, akkor

$$a \circ (b \circ c) = 0 = (a \circ b) \circ c.$$

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy

$$a, b, c \in B.$$

Ha

$$a \circ (b \circ c) \neq 0,$$

akkor

$$b \circ c \neq 0,$$

amiből a $\circ$ művelet definíciója miatt következik, hogy a bc és $a(bc)$ szorzatok definiálva vannak B-ben és

$$bc = b \circ c,$$

valamint

$$a(bc) = a \circ (b \circ c).$$

A 9.30. Definíció (B2)(3) feltétele szerint B-ben definiálva vannak az ab és $(ab)c$ szorzatok, és

$$(ab)c = a(bc).$$

A $\circ$ művelet definíciója alapján

$$ab = a \circ b$$

és

$$(ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Így

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Hasonlóan igazolható az

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség teljesülése az $(a \circ b) \circ c \neq 0$ esetben. Még az $a \circ (b \circ c) = 0$ és $(a \circ b) \circ c = 0$ eset tárgyalása van hátra, de ekkor az

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen mindkét oldali kifejezés egyenlő a 0 elemmel.

Fordítva, tegyük fel, hogy $S = B^0$ félcsoport a tételben definiált $\circ$ műveletre nézve. Legyenek $a, b, c \in B$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy a bc és $a(bc)$ szorzatok definiálva voltak az B-n értelmezett eredeti parciális művelet szerint. Akkor

$$b \circ c = bc$$

és

$$a \circ (b \circ c) = a(bc).$$

A $\circ$ művelet asszociativitása miatt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$(a \circ b) \circ c \neq 0,$$

és persze az is, hogy

$$a \circ b \neq 0.$$

A $\circ$ művelet definíciója alapján ez azt jelenti, hogy ab és $(ab)c$ szorzatok értelmezve vannak B-ben és

$$ab = a \circ b,$$

$$(ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

A $\circ$ művelet asszociativitása miatt

$$(ab)c = a(bc)$$

is következik. Tehát a (B2)(3) feltétel teljesül. Hasonlóan igazolható a (B2)(2) feltétel B-ben való teljesülése. $\square$

9.32. Definíció *Egy B Brandt-gruppoidból az előző lemma szerint származtatott $S = B^0$ félcsoportot Brandt-félcsoportnak nevezzük. Egy kicsit részletesebben: Brandt-félcsoporton egy olyan 0-elemes S félcsoportot értünk, amely teljesíti a következő feltételek mindegyikét:*

(A1) Ha a, b és c az S olyan elemei, amelyekre $ac = bc \neq 0$ vagy $ca = cb \neq 0$ teljesül, akkor $a = b$.

(A2) Ha a, b és c az S olyan elemei, amelyekre $ab \neq 0$ és $bc \neq 0$ teljesülnek, akkor $abc \neq 0$ is teljesül.

(A3) Az S tetszőleges $a \neq 0$ eleméhez létezik egy és csak egy olyan $e \in S$ elem, melyre $ea = a$ teljesül, egy és csak egy olyan $f \in S$ elem, amelyre $af = a$ teljesül, valamint egy és csak egy olyan $a' \in S$ elem, amelyre $a'a = f$ teljesül (e-t az a bal oldali egységelemének, f-et az a jobb oldali egységelemének, a'-t pedig az a inverzének is szokták nevezni).

(A4) Ha e és f a nullelemtől különböző idempotens elemek, akkor $eSf \neq \{0\}$.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban szereplő feltételek nem függetlenek. Bebizonyítható, hogy az (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltételből következnek. Így érvényes a következő tétel.

9.33. Tétel *A 9.32. Definícióban szereplő (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltétel következményei, így egy* 0*-elemes S félcsoport akkor és csak akkor Brandt félcsoport, ha teljesíti a 9.32. Definícióban szereplő (A3) és (A4) feltételeket.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy 0-elemes S félcsoport teljesíti az (A3) feltételt. Ahhoz, hogy megmutassuk az (A1) és (A2) feltételek teljesülését, először néhány előkészítő részeredményt bizonyítunk. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Jelölje e az a bal oldali egységelemét, f pedig az a jobb oldali egységelemét. Jelölje a' az a inverzét. Ekkor $ea = a$, $af = a$ és $a'a = f$. Megmutajuk, hogy a következő egyenlőségek is teljesülnek:

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad fa' = a'e = a', \quad aa' = e. \tag{9.1}$$

Mivel az $ea = a$ feltételből

$$e^2a = e(ea) = ea = a$$

következik, ezért

$$e^2 = e, \tag{9.2}$$

mert az a bal oldali egységeleme egyértelműen meghatározott. Hasonlóan igazolható, hogy

$$f^2 = f. \tag{9.3}$$

Mivel

$$a = af = a(a'a) = (aa')a,$$

ezért

$$aa' = e, \tag{9.4}$$

ugyancsak az a bal oldali egységelemének egyértelmű létezése miatt. Az

$$(a'e)a = a'(ea) = a'a = f$$

teljesüléséből

$$a'e = a' \tag{9.5}$$

adódik az a elem inverzének egyértelmű létezése miatt. Ez azt jelenti, hogy e az a' elem jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy

$$fa' = a', \tag{9.6}$$

és így f az a' elem bal oldali egységeleme. Mivel (a fentiek szerint) $aa' = e$, ezért a az a' elem inverze, azaz

$$(a')' = a. \tag{9.7}$$

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy S tetszőleges e és f idempotens elemei esetén az $ef \neq 0$ feltételből $e = f$ következik. Legyen tehát e és f az S két idempoten eleme. Tegyük fel, hogy

$$ef \neq 0.$$

Legyen

$$a = ef.$$

Akkor $ea = a$ és $af = a$. Legyen a' az a elem inverze, azaz az S azon egyértelműen meghatározott eleme, amelyre $a'a = f$ teljesül. A (9.4) és a (9.6) eredmények miatt

$$e = aa' = (ef)a' = e(fa') = ea',$$

amiből

$$a' = e$$

következik, hiszen az e elemnek önmaga az egyértelműen meghatározott jobb oldali egységeleme, itt viszont azt kaptuk eredményül, hogy a' is jobb oldali inverze e-nek. Ekkor viszont (felhasználva (9.7)-t is)

$$a = (a')' = e' = e$$

következik. Mivel

$$ee = e = a = ef,$$

ezért

$$e = f.$$

Az eddigi eredmények felhasználásával a következőkben bebizonyítjuk, hogy valamely $a, b \in S$ elemek esetén $ab \neq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha az a elem jobb oldali egységeleme megegyzik a b elem bal oldali egységelemével. Tekintsünk tehát két S-beli a és b elemet. Jelölje f az a jobb oldali egységelemét, e pedig a b bal oldali egységelemét. Tegyük fel, hogy

$$ab \neq 0.$$

(A 9.2) és (9.3) egyenlőségek miatt

$$e^2 = e, \quad f^2 = f.$$

Mivel

$$0 \neq ab = (af)(eb) = a(fe)b,$$

ezért

$$fe \neq 0.$$

A bizonyítás előző részének eredményét használva,

$$e = f.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$e = f.$$

Akkor

$$f = f^2 = fe = (a'a)(bb') = a'(ab)b',$$

és így

$$ab \neq 0.$$

A bizonyítás következő részében most már megmutatjuk, hogy teljesül az (A1) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy

$$ac = bc \neq 0$$

valamely $a, b, c \in S$ elemekre. Az előzőek miatt a c elem e bal oldali egységeleme megegyezik az a és b elemek jobb oldali egységelemével. Ha c' jelöli a c elem inverzét, akkor

$$cc' = e,$$

és így

$$a = ae = a(cc') = (ac)c' = (bc)c' = b(cc') = be = b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy a $ca = cb \neq 0$ feltételből $a = b$ következik.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az (A2) feltétel is teljesül. Legyenek $a, b, c \in S$ olyan elemek, amelyek esetén

$$ab \neq 0 \quad \text{és} \quad bc \neq 0.$$

Ekkor (az előzőeknek megfelelően) az a elem jobb oldali egységeleme megegyezik a b elem bal oldali egységelemével, ami jól láthatóan az bc szorzatnak is bal oldali egységeleme. Így

$$a(bc) \neq 0. \qquad \square$$

9.34. Tétel *Egy* 0*-elemes S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S egy Brandt félcsoport.

(2) S egy teljesen 0-egyszerű inverz félcsoport.

(3) S izomorf egy olyan reguláris $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, I; E)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal, amely az $I \times I$ típusú E egységmátrixszal van definiálva.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2): Legyen S egy Brandt félcsoport. Először megmutatjuk, hogy S 0-egyszerű. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges, a 0-elemtől különböző elemek. Jelölje e az a elem bal oldali, f pedig a b elem jobb oldali egységelemét. A 9.33. Tétel bizonyításában szereplő (9.2) és (9.3) eredmények miatt e és f a 0-elemtől különböző idempotens elemek, s ezért az (A4) feltétel miatt

$$eSf \neq \{0\}.$$

Legyen

$$0 \neq c \in eSf$$

tetszőleges elem. Jelölje a' az a elem inverzét, c' pedig a c elem inverzét. Akkor

$$c'c = f$$

és ((9.4) miatt)

$$aa' = e.$$

Legyen

$$x = a'c \quad \text{és} \quad y = bc'.$$

Akkor

$$yax = bc'aa'c = bc'ec = bc'c = bf = b.$$

A 4.7. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy az S félcsoport 0-egyszerű.

A következőkben megmutatjuk, hogy S-nek van egy primitív idempotens eleme. Az (A3) feltétel miatt S-nek van legalább egy $e \neq 0$ idempotens eleme (lásd a 9.33. Tétel bizonyítását). Megmutatjuk, hogy e primitív. Legyen f olyan idempotens eleme S-nek, amelyre

$$0 < f \leq e$$

teljesül. Akkor

$$ef = f = ff,$$

amiből

$$e = f$$

következik, hiszen f önmagának bal oldali egységeleme, az $ef = f$ egyenlőség pedig azt mutatja, hogy e is az f bal oldali egységeleme, de a bal oldali egységelem egyértelmű létezése miatt ekkor szükségképpen $e = f$ teljesül. Tehát e primitív idempotense S-nek. Tehát (definíció szerint) S teljesen 0-egyszerű félcsoport.

A 9.6. Tétel miatt S reguláris félcsoport. A 6.21. Következmény szerint elegendő azt megmutatni, hogy S minden $\mathcal{R}$-osztálya és minden $\mathcal{L}$-osztálya egyetlen idempotens elemet tartalmaz. Legyen R az S félcsoport egy nem-nulla $\mathcal{R}$-osztálya. Mivel S reguláris, ezért R tartalmaz legalább egy nem-nulla e idempotens elemet. Legyen $f \in R$ tetszőleges idempotens elem. A 4.42. Tétel miatt e bal oldali egységeleme R-nek és így

$$ef = f,$$

ami azt eredményezi, hogy e bal oldali egységeleme f-nek. Viszont f is bal oldali egységeleme f-nek, s ezért

$$e = f. \qquad \square$$

Tehát R egyetlen idempotens elemet tartalmaz. Hasonlóan igazolható, hogy minden $\mathcal{L}$-osztály egyetlen idempotens elemet tartalmaz. Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy (1)-ből következik (2).

(2)-ből következik (3):

Feladatok

9.1. Feladat *(Megoldás: 17.27.) Mutassuk meg, hogy egy L balzéró félcsoport és egy R jobbzéró félcsoport $L \times R$ direkt szorzata teljesen egyszerű!*

9.2. Feladat *(Megoldás: 17.28.) Mutassuk meg, hogy két félcsoport direkt szorzata akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha mindkét félcsoport teljesen egyszerű!*

9.3. Feladat *(Megoldás: 17.29.) Mutassuk meg, hogy egy teljesen 0-egyszerű félcsoport minden 0-tól különböző idempotens eleme primitív!*

10. fejezet

Félcsoportok félháló-felbontása

10.1. Definíció *Legyen $\mathcal{C}$ félcsoportok egy osztálya. Egy S félcsoport valamely σ kongruenciáját $\mathcal{C}$-kongruenciának nevezzük, ha az S/σ faktorfélcsoport benne van $\mathcal{C}$-ben; az ehhez tartozó partíciót S $\mathcal{C}$-felbontásának nevezzük. Ha σ a legszűkebb $\mathcal{C}$-kongruencia (ha létezik ilyen), akkor a hozzá tartozó partíciót S legbővebb $\mathcal{C}$-felbontásának nevezzük, s az S/σ faktorfélcsoportról azt mondjuk, hogy az S legbővebb $\mathcal{C}$-homomorf képe.*

10.2. Megjegyzés *Az világos, hogy ha $\mathcal{V}$ félcsoportoknak tetszőleges varietása, akkor az S-en értelmezett $\mathcal{V}$-kongruenciák metszete is $\mathcal{V}$-kongruencia, s így létezik S-nek legszűkebb $\mathcal{V}$-kongruenciája, azaz legbővebb $\mathcal{V}$-felbontása. Megemlítjük, hogy félcsoportok egy $\mathcal{V}$ osztályát varietásnak nevezzük, ha megadható azonosságoknak olyan $\mathcal{I}$ családja, hogy $\mathcal{V}$ mindazon félcsoportokból áll, amelyek teljesítik az $\mathcal{I}$-ben lévő azonosságok mindegyikét.*

10.1. Félcsoportok legszűkebb félháló-kongruenciája

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (1.38. Definíció), ha egy S félcsoport minden eleme idempotens, akkor az S félcsoportot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló. Mivel tetszőleges félcsoportban igaz, hogy akármennyi félháló-kongruencia metszete is félháló-kongruencia, ezért minden félcsoportnak létezik legszűkebb félháló-kongruenciája. Ebben a fejezetben megkonstruáljuk tetszőleges félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciáját.

10.3. Definíció *Egy félcsoportot félháló-felbonthatatlannak nevezünk, ha az univerzális relációja az egyetlen félháló-kongruenciája.*

A következőkben megmutatjuk, hogy minden félcsoport felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára.

Legyen S egy félcsoport. Jelölje σ az S félcsoport azon binér relációját, amely szerint az S félcsoport a és b elemeire $(a, b) \in \sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha a osztja a b elem valamelyik hatványát, azaz megadható olyan m pozitív egész szám, illetve megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$xay = b^m$$

teljesül. Az világos, hogy σ reflexív reláció. Jelölje ϱ a σ reláció tranzitív lezártját, azaz az S félcsoport azon relációját, amely szerint az S félcsoport valamely a és b elemére az $(a, b) \in \varrho$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az S elemeinek olyan

$$a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$$

sorozata, amelyben szereplő a_i $(i = 0, 1, \ldots n-1)$ elemek mindegyikére teljesül, hogy

$$(a_i, a_{i+1}) \in \sigma.$$

10.4. Lemma *Egy S félcsoport tetszőleges a és b elemei, valamint akármilyen m pozitív egész szám esetén $a^m b^m \ \varrho \ ab \ \varrho \ ba$.*

Bizonyítás. A bizonyítást az m-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Legyen S félcsoport, a és b pedig tetszőleges S-beli elemek. Mivel

$$\sigma \subseteq \varrho$$

és

$$(x^2, x) \in \sigma$$

minden $x \in S$ elemre, ezért (a σ definíciója miatt)

$$ab \ \sigma \ baba = (ba)^2 \ \sigma \ ba.$$

Tehát az állítás igaz $m = 1$-re:

$$ab \ \varrho \ ba. \tag{10.1}$$

Tegyük fel, hogy $m > 1$ és az állítás igaz minden m-nél kisebb kitevőre. Akkor az indukciós feltétel és az előzőekben nyert (10.1) eredmény felhasználásával adódik, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$a^m b^m = a(a^{m-1}b^m) \ \varrho \ (a^{m-1}b^m)a \ \sigma \ (a^{m-1}b^m)^2 \ \sigma \ (a^{m-1}b^m) =$$

$$= (a^{m-1}b^{m-1})b \ \varrho \ b(a^{m-1}b^{m-1}) \ \sigma \ (a^{m-1}b^{m-1})^2 \ \sigma \ (a^{m-1}b^{m-1}) \ \varrho \ ab \ \varrho \ ba.$$

Tehát

$$a^m b^m \ \varrho \ ab \ \varrho \ ba.$$

□

10.5. Lemma *Ha $(a, b) \in \sigma$ teljesül egy S félcsoport valamely a és b elemei esetén, akkor tetszőleges $c \in S$ elemre $(ca, cb) \in \varrho$ és $(ac, bc) \in \varrho$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma$ teljesül egy S félcsoport valamely a és b elemei esetén. Akkor léteznek olyan S^1-beli x és y elemek, valamint megadható olyan m pozitív egész szám, hogy

$$xay = b^m.$$

Legyen $c \in S$ tetszőleges elem. Akkor a 10.4. Lemma szerint

$$ca \ \sigma \ (ayc)^2 \ \sigma \ ayc \ \sigma \ (c^m xay)^2 \ \sigma \ c^m xay = c^m b^m \ \varrho \ cb.$$

Ebből már adódik

$$(ca, cb) \in \varrho.$$

Így

$$ac \ \varrho \ ca \ \varrho \ cb \ \varrho \ bc.$$

□

Legyen λ az S félcsoport azon relációja, amely szerint az S félcsoport a és b elemeire $(a, b) \in \lambda$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(a, b) \in \varrho$ és $(b, a) \in \varrho$.

10.6. Tétel *Tetszőleges S félcsoport esetén a λ reláció az S félcsoport legszűkebb félhálókongruenciája. A λ-osztályok félháló-felbonthatatlan félcsoportok.*

Bizonyítás. Az világos, hogy λ az S félcsoport egy ekvivalenciarelációja. Mivel ϱ a σ tranzitív lezártja, ezért aa 10.5. Lemma szerint ϱ balról kompatibilis és jobbról kompatibilis az S-beli műveletre nézve. Így λ is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Következésképpen λ az S félcsoport egy kongruenciája (használva a 2.22. Tételt is). Mivel

$$(x, x^2) \in \sigma \quad \text{és} \quad (x^2, x) \in \sigma$$

tetszőleges $x \in S$ elem esetén, ezért λ köteg-kongruencia, azaz

$$(x, x^2) \in \lambda$$

minden $x \in S$ elem esetén. A 10.4. Lemma alapján viszont világos, hogy λ kommutatív kongruencia. Tehát λ az S félcsoport félháló-kongruenciája.

Legyen ξ az S félcsoport tetszőleges félháló-kongruenciája. Legyen $Y = S/\xi$. Definiáljunk az S félcsoporton egy $<_\xi$ relációt a következőképpen: $x <_\xi y$ akkor és csak akkor, ha $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$ és $\alpha < \beta$ (azaz, $\alpha\beta = \beta$). Az így definiált $<_\xi$ relációra teljesül, hogy

$$(x, y) \in \xi \quad \longleftrightarrow \quad x <_\xi y \text{ és } y <_\xi x.$$

Megjegyezzük azt is, hogy az $(x, y) \in \sigma$ feltétel maga után vonja $x <_\xi y$ teljesülését. Így az $(a, b) \in \varrho$ feltételből $a <_\xi b$ következik. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \lambda$$

teljesül az S félcsoport valamely a és b elemeire. Akkor

$$a <_\xi b \quad \text{és} \quad b <_\xi a,$$

amiből

$$(a, b) \in \xi$$

következik. Tehát

$$\lambda \subseteq \xi.$$

Ez éppen azt bizonyítja, hogy λ az S félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciája.

Legyen S_α az S félcsoport egy λ-osztálya. Mivel S/λ elemei idempotensek, ezért S_α félcsoport. Megmutatjuk, hogy S_α félháló-felbonthatatlan. Legyenek $a, b \in S_\alpha$ tetszőleges elemek. Mivel $(a, b) \in \lambda$, ezért van az S elemeinek olyan

$$a = a_0, \ldots, a_k = b = b_0, \ldots, b_t = a$$

sorozata, amelyben minden elem (az utolsót nem számítva) osztja a következő valamely hatványát, azaz

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

és

$$z_{j-1}b_{j-1}u_{j-1} = b_j^{n_i} \quad (j = 1, \ldots, t)$$

teljesül alkalmas $m_i, n_j \geq 1$ pozitív egész számokra és $x_i, y_i, z_j, u_j \in S$ elemekre. Így

$$a_0 <_\lambda \cdots <_\lambda a_k <_\lambda b_1 <_\lambda \cdots <_\lambda b_t,$$

amiből

$$a \; \lambda \; b \; \lambda \; a_i \; \lambda \; b_j$$

következik minden $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, t$ indexre. Ez azt jelenti, hogy a fenti sorozatban szereplő a_i és b_j elemek mindegyike benne van S_α-ban. Az

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i}$$

egyenlőségből

$$(a_i x_{i-1})a_{i-1}(y_{i-1}a_i) = a_i^{m_i+2}$$

következik. Megjegyezzük, hogy mivel

$$a_i <_\lambda a_i x_{i-1} <_\lambda a_i^{m_i+2},$$

ezért

$$a_i x_{i-1}, y_{i-1}a_i \in S_\alpha.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$b_j y_{j-1}, u_{j-1} b_j \in S_\alpha.$$

Jelölje σ_α, ϱ_α, illetve λ_α az S_α félcsoporton definiált σ, ϱ, illetve λ relációkat. Az előzőekből következően

$$a_{i-1}\ \sigma_\alpha\ a_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

és

$$b_{j-1}\ \sigma_\alpha\ b_j \quad (j = 1, \ldots, t).$$

Így

$$a\ \varrho_\alpha\ b, \quad b\ \varrho_\alpha\ a.$$

Következésképpen

$$a\ \lambda_\alpha\ b.$$

Tehát λ_α az S_α félcsoport univerzális relációja. Mivel λ_α az S_α félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciája, ezért S_α-nak csak egyetlen félháló-kongruenciája van, az univerzális reláció. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy S_α félháló-felbonthatatlan. □

10.7. Következmény *Minden félcsoport felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára.*

Bizonyítás. A 10.6. Tétel alapján nyilvánvaló. □

10.8. Következmény *Egy S félcsoport akkor és csak akkor félháló-felbonthatatlan, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén megadható S elemeinek egy olyan*

$$a = a_0, \cdots, a_n = b$$

sorozata, amely esetén az a_{i-1} elem osztja az a_i elem valamelyik hatványát ($i = 1, \ldots, n$).

Bizonyítás. Az állítás a 10.6. Tétel következménye. □

10.2. Arkhimédeszi félcsoportok félhálója

10.9. Definíció *Egy S félcsoportot arkhimédeszi félcsoportnak nevezünk, ha bármely két elemét véve, mindegyik osztója a másik egy alkalmas hatványának.*

10.10. Lemma *Minden arkhimédeszi félcsoport félháló-felbonthatatlan.*

Bizonyítás. A 10.8. Következmény szerint nyilvánvaló. □

10.11. Következmény *Minden egyszerű félcsoport félháló-felbonthatatlan.*

Bizonyítás. Mivel a 4.2. Tétel szerint egy félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha tetszőleges a eleme esetén $SaS = S$, ezért minden egyszerű félcsoport arkhimédeszi. Így a 10.10. Lemma miatt igaz az állítás. □

10.12. Definíció *Egy S félcsoportot bal (jobb) Putcha-félcsoportnak nevezünk, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $y \in xS^1$ ($y \in S^1x$) feltételből $y^m \in x^2S^1$ ($y^m \in S^1x^2$) következik valamely m pozitív egész számmal.*

Egy S félcsoportot Putcha-félcsoportnak nevezünk, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $y \in S^1xS^1$ feltételből $y^m \in S^1x^2S^1$ következik valamely m pozitív egész számmal.

10.13. Lemma *S akkor és csak akkor bal (jobb) Putcha-félcsoport, ha tetszőleges $x, y \in S$ elemekhez és tetszőleges n pozitív egész számhoz megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre $(xy)^m \in x^nS^1$ ($(xy)^m \in S^1y^n$) teljesül.*

Bizonyítás. Legyen S egy bal Putcha-félcsoport. Mivel $xy \in xS^1$, ezért megadható olyan t pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^t \in x^2S^1$$

teljesül. Ebből viszont az következik, hogy minden k pozitív egész számhoz van olyan p pozitív egész szám, hogy

$$(xy)^p \in x^{2^k}S^1.$$

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy

$$2^k \geq n.$$

Akkor

$$(xy)^m \in x^nS^1 \subseteq x^{2^k}S^1$$

teljesül valamely m pozitív egész számra.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport teljesíti azt a feltételt, hogy tetszőleges $x, y \in S$ elemekhez és tetszőleges n pozitív egész számhoz megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^m \in x^nS^1$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$y \in xS^1$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Ekkor

$$y^2 = xu,$$

ahol u az S valamely eleme. Ha alkalmazzuk az S-re vonatkozó feltételünket $n = 2$ esetre, akkor megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$y^{2m} = (xu)^m \in x^2S^1.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy S bal Putcha-félcsoport. A jobb Putcha-félcsoportokkal kapcsolatos állítás bizonyítása a bal oldali esethez hasonló. □

10.14. Lemma *Minden bal (jobb) Putcha-félcsoport egyben egy Putcha-félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen S egy bal Putcha-félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek a

$$b \in S^1 a S^1$$

feltétellel, azaz

$$b = xay$$

valamely $x, y \in S^1$ elemekkel. Feltehetjük, hogy az x és y elemek valamelyike S-ben van, mert $a = b$-re az állítás igaz. Akkor viszont a 10.13. Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám, hogy

$$(a(yx))^m \in a^2 S^1.$$

Ebből viszont

$$b^{m+1} = (xay)^{m+1} = x(ayx)^m ay \in S^1 a^2 S^1$$

adódik. Tehát S Putcha-félcsoport. A jobb oldali eset bizonyítása a bal oldali esethez hasonlóan bizonyítható. □

10.15. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor bontható fel arkhimédeszi félcsoportok félhálójára, ha S Putcha-félcsoport. Ebben az esetben a félháló-felbontásnak megfelelő legszűkebb félháló-kongruencia a következő:*

$$\eta = \{(a, b) \in S \times S : \ (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) \ a^m \in SbS, \ b^n \in SaS\}.$$

Bizonyítás. Legyen S egy Putcha-félcsoport. Legyen η a tételbeli reláció. Világos, hogy η az S reflexív és szimmetrikus relációja. (Megjegyezzük, hogy η tetszőleges S félcsoport esetén reflexív és szimmetrikus.) Megmutajuk, hogy η tranzitív is S-en. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek az

$$(a, b) \in \eta$$

és

$$(b, c) \in \eta$$

feltétellel. Ez azt jelenti, hogy

$$a^m \in SbS, \quad b^n \in SaS$$

és

$$b^t \in ScS, \quad c^k \in SbS$$

teljesül valamely m, n, t, k pozitív egész számokkal. Mivel S Putcha-félcsoport, ezért pinden r pozitív egész számhoz megadható olyan u pozitív egész szám, amelyre

$$c^u \in Sb^{2^r}S$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$2^r \geq n.$$

Akkor

$$c^u \in Sb^{2^r}S \subseteq SaS.$$

Hasonlóan,

$$a^v \in ScS$$

valamely v pozitív egész számmal. Következésképpen η tranzitív.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy η kongruencia S-en, Tekintsünk olyan S-beli a és b elemeket, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan m, n pozitív egész számok és olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, amelyekre

$$a^m = ubv, \quad b^n = xay.$$

Legyen $s \in S$ tetszőleges. Jelöljön k olyan pozitív egész számot, amelyre

$$2^k \geq m$$

teljesül. Mivel S Putcha-félcsoport, és mivel $sa \in S^1aS^1$, ezért megadható olyan t pozitív egész szám, hogy

$$(sa)^t \in Sa^{2^k}S.$$

Így léteznek olyan $e, f \in S$ elemek, hogy

$$(sa)^t = ea^{2^k}f = ea^m a^{2^k-m}f = eubva^{2^k-m}f.$$

Ebből viszont

$$(sa)^{t+1} = eu(bva^{2^k-m}fs)a \in Sbva^{2^k-m}fsS$$

adódik. Mivel S Putcha-félcsoport, ezért megadható olyan p pozitív egész szám, amelyre

$$(sa)^p \in S(bva^{2^k-m}fs)^2S \subseteq SsbS$$

teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$(sb)^q \in SsaS$$

valamely q pozitív egész számmal. Igy

$$(sa, sb) \in \eta.$$

Tehát η az S félcsoport balkongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy η az S félcsoport jobbkongruenciája. Következésképpen η az S félcsoport kongruenciája. Mivel

$$(a, a^2) \in \eta$$

és

$$(bc, cb) \in \eta$$

teljesül tetszőleges $a, b, c \in S$ elemekre, ezért az $Y = S/\eta$ faktor félcsoport félháló. Így az S félcsoport az S_α $(\alpha \in Z)$ η-osztályok félhálója. Megmutatjuk, hogy az S félcsoport S_α $(\alpha \in Z)$ részfélcsoportjai arkhimédeszi félcsoportok. Legyen S_α tetszőleges η-osztály. Akkor tetszőleges $a, b \in S_\alpha$ elemekhez megadhatók olyan m, n pozitív egész számok, valamint olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, hogy

$$xay = b^m, \quad ubv = a^n.$$

Tegyük fel, hogy

$$x \in S_\gamma, \quad y \in S_\delta.$$

Akkor

$$\alpha = \alpha\gamma\delta \in Y,$$

azaz

$$S_\alpha = S_{\alpha\gamma\delta}.$$

Mivel

$$(xayx)a(yxay) = b^{3m}$$

és

$$xayx, yxay \in S_{\alpha\gamma\delta} = S_\alpha,$$

ezért

$$b^{3m} \in S_\alpha a S_\alpha.$$

Hasonlóan,

$$a^{3n} \in S_\alpha b S_\alpha.$$

Így S_α arkhimédeszi félcsoport.

Megmutatjuk, hogy η az S félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciája. Legyen σ az S félcsoport tetszőleges félháló-kongruenciája. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \eta$ valamely $a, b \in S$ elemekre, azaz $xay = b^i$ és $ubv = a^j$ teljesül valamely $x, y, u, v \in S$ elemekre és valamely i, j pozitív egész számokkal. Akkor

$$a \ \sigma \ a^j = ubv \ \sigma \ ub^{i+1}v = uxaybv \ \sigma \ xaubvy =$$

$$xa^{j+1}y \ \sigma \ xay = b^i \ \sigma \ b.$$

Ezért
$$\eta \subseteq \sigma.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport Y félhálója S_α $(\alpha \in Y)$ arkhimédeszi félcsoportoknak. Tegyük fel, hogy
$$b \in S^1 a S^1$$
valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor
$$xay = b^3$$
valamely $x, y \in S$ elemekkel. Világos, hogy $xay = b^3$ és xa^2y ugyanabban az S_α osztályban vannak. Mivel S_α arkhimédeszi félcsoport, ezért megadható olyan k pozitív egész szám, amelyre
$$b^{3k} \in S_\alpha xa^2yS_\alpha \subseteq Sa^2S$$
teljesül. Ez viszont annyit jelent, hogy az S félcsoport Putcha-félcsoport. □

10.16. Következmény *Legyen S olyan félcsoport, amely előáll S_α $(\alpha \in Y)$ arkhimédeszi félcsoportok Y félhálójaként. Akkor S tetszőleges G részcsoportjához van olyan $\alpha \in Y$ elem, hogy $G \subseteq S_\alpha$.*

Bizonyítás. Mivel a G elemei az S félcsoport ugyanazon η-osztályához tartoznak, ezért az állítás nyilvánvaló. □

10.17. Következmény *Minden bal (jobb) Putcha-félcsoport felbontható arkhimédeszi félcsoportok félhálójára.*

Bizonyítás. A 10.14. Lemma és a 10.15. Tétel szerint nyilvánvaló. □

10.18. Következmény *Minden kommutatív félcsoport előáll kommutatív arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként.*

Bizonyítás. Legyen S kommutatív félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy
$$b \in S^1 a S^1.$$
Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, melyekre
$$b = xay$$
teljesül. Mivel S kommutatív, ezért
$$b^2 = (xay)^2 = x^2a^2y^2,$$
amiből
$$b^2 \in S^1 a^2 S^1$$
következik. Tehát S Putcha-félcsoport. A 10.15. Tétel szerint S kommutatív arkhimédeszi félcsoportok félhálója. □

10.19. Definíció *Egy* 0*-elemes* S *félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha minden* a *eleméhez megadható olyan* n *pozitíiv egész szám, amelyre* $a^n = 0$ *teljesül. Egy* S *félcsoportot nilpotens félcsoportnak nevezünk, ha* $S^n = \{0\}$ *teljesül valamely* n *pozitív egész számra.*

Minden nilpotens félcsoport nil, de a fordított állítás általában nem igaz. Érvényes viszont a következő.

10.20. Lemma *Minden véges nil félcsoport nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen S véges nil félcsoport. Az S végessége miatt megadható olyan n pozitív egész szám, hogy S jobb oldali ideáljainak bármely szigorúan csökkenő lánca nem hosszabb n-nél. Legyenek

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in S$$

tetszőleges elemek. Az

$$a_1S^1 \supseteq a_1a_2S^1 \supseteq \cdots \supseteq a_1 \cdots a_nS^1 \supseteq a_1 \cdots a_na_{n+1}S^1$$

lánc hossza $n + 1$, ezért

$$a_1 \cdots a_kS^1 = a_1 \cdots a_ka_{k+1}S^1$$

valamely $1 \leq k \leq n$ egész számra. Így megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$a_1 \cdots a_k = a_1 \cdots a_ka_{k+1}x$$

teljesül. Ebből

$$a_1 \cdots a_k = a_1 \cdots a_k(a_{k+1}x)^t$$

következik minden t pozitív egész számra. Mivel S nil félcsoport, ezért

$$(a_{k+1}x)^m = 0$$

valamely m pozitív egész számra, amiből

$$a_1 \cdots a_k = 0,$$

és így

$$a_1 \cdots a_n = 0$$

adódik. Tehát

$$S^n = \{0\},$$

azaz, S nilpotens félcsoport. □

Világos, hogy minden nil félcsoport arkhimédeszi. A nil félcsoportok fontos szerepet játszanak az idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoportok szerkezetének leírásában. Ezt mutatja a következő struktúratétel.

10.21. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor idempotens elemes arkhimédeszi félcsoport, ha idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoportnak nil félcsoporttal való ideálbővítése.*

Bizonyítás. Legyen S olyan arkhimédeszi félcsoport, amely tartalmaz egy e idempotens elemet. Az világos, hogy $K = SeS$ az S egy ideálja. Mivel S arkhimédeszi, ezért S minden ideálja tartalmazza S összes idempotens elemét. Érvényes ez K-ra is. Legyen A az S tetszőleges ideálja. Tetszőleges $a \in A$ elem esetén

$$e \in S^1aS^1 \subseteq A$$

(mert S^1aS^1 és A az S ideáljai), amiből

$$K \subseteq A$$

következik. Tehát K az S félcsoport magja. Így K az S egy minimális ideálja, s ezért K egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoport. Az világos, hogy S a K-nak az S/K Rees-féle faktorfélcsoporttal való ideálbővítése. Mivel S arkhimédeszi félcsoport, ezért az S/K Rees-féle faktorfélcsoport nil félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport egy idempotens elemes, egyszerű K félcsoportnak egy Q nil félcsoporttal való ideálbővítése. Feltehetjük, hogy $S = K \cup Q^*$, ahol $Q^* = Q \setminus \{0\}$. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Mivel Q nil félcsoport, ezért megadhatók olyan n és m pozitív egész számok, amelyekre

$$a^n,\ b^m \in K.$$

K egyszerű félcsoport, ezért

$$a^n \in Kb^nK \subseteq S^1bS^1,$$

azaz b osztja az a elem n-edik hatványát. Hasonlóan,

$$b^m \in S^1aS^1,$$

Azaz a osztja a b elem m-edik hatványát. Tehát S arkhimédeszi félcsoport. □

10.22. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor olyan kommutatív arkhimédeszi félcsoport, amely tartalmaz idempotens elemet, ha előáll egy kommutatív csoportnak egy kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítéseként.*

Bizonyítás. Legyen S olyan kommutatív arkhimédeszi félcsoport, amely tartalmaz egy idempotens elemet. A 10.21. Tétel szerint S egy egyszerű K félcsoportnak egy N nil félcsoporttal való ideálbővítése. Mivel a kommutatív egyszerű félcsoport mindegyike csoport (7.4. Tétel), ezért K egy kommutatív csoport. Mivel N az S epimorf képe, ezért N kommutaív. Tehát S a K kommutatív csoportnak az N kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítése.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amely előáll egy kommutatív K csoportnak egy kommutatív N nil félcsoporttal való ideálbővítéseként. A 10.21. Tétel miatt S idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ha $ab \notin K$ (azaz $ab \neq 0$ az N-ben; 0 az N nulleleme), akkor $ab = ba \neq 0$ N-ben, és így $ab = ba \notin K$ az S félcsoportban. Ha $ab \in K$, (azaz $ab = 0$ az N-ben), akkor $ba = 0$ az N-ben és így $ba \in K$ az S-ben, amiből

$$ab = (ab)e = a(be) = a(e(be)) = (ae)(be) = (be)(ae) = b(e(ae) = b(ae) = (ba)e = ba$$

következik. Tehát

$$ab = ba$$

mindkét esetben. Következésképpen S kommutatív félcsoport. □

10.23. Tétel *Idempotens elem nélküli kommutatív arkhimédeszi félcsoportok mindegyikének van nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. Legyen S egy idempotens elem nélküli kommutatív, arkhimédeszi félcsoport. Legyen $a \in S$ tetszőleges. Legyen továbbá

$$H_a = \{x \in S: \ (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) \ xa^m = a^n\}.$$

Világos, hogy $a^t \in H_a$ minden pozitív egész t kitevőre. Egyszerűen igazolható, hogy H_a reflexív és unitér részfélcsoportja S-nek. Mivel S arkhimédeszi, ezért tetszőleges $b \in S$ elem esetén van olyan $x \in S$ elem, hogy xb megegyezik az a valamely hatványával, s ezért $xb \in H_a$. Ha S valamely a elemére $H_a \neq S$, akkor az S félcsoport $\mathcal{P}_{H_a}$ főkongruencia szerinti faktorcsoport nem triviális. Ha $H_a = S$ volna minden S-beli a elemre, akkor $a \in H_{a^2}$ és így

$$a(a^2)^m = (a^2)^n$$

teljesülne valamely pozitív egész n és m kitevőkre. Mivel a bal oldali kitevő páratlan a jobb oldali páros, ezért A periodikus elem lenen, s ezért S tartalmazna egy idempotens elemet az 1.29. Tétel szerint. Ez viszont nem lehetséges az S-re tett feltétel szerint. □

10.24. Tétel *Tetszőleges S félcsoportra az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

1. *S egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoport.*

2. S egy teljesen egyszerű félcsoport.

Bizonyítás. Legyen S egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoport. Legyen $x \in S$ tetszőleges elem és $n \geq 3$ tetszőleges egész szám.Megmutatjuk, hogy x^n az S félcsoport egy reguláris eleme. Mivel S egyszerű félcsoport, ezért

$$x^{n-2} \in Sx^nS$$

és ezért megadhatók olyan $u, v \in S$ elemek, amelyekre

$$x^n = xux^nvx$$

teljesül. Az xu elemmel balról, a vx elemmel jobbról szorozgatva ezt az egyenlőséget azt kapjuk, hogy tetszőleges m pozitív egész szám esetén

$$x^n = (xu)^m x^n (vx)^m.$$

a 10.13. Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$(xu)^m \in x^nS$$

és

$$(vx)^m \in Sx^n$$

teljesül. Így

$$x^n \in x^nSx^n,$$

azaz x^n az S félcsoport egy reguláris eleme. A 6.2. Lemma szerint ekkor viszont az S félcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ezek után megmutatjuk, hogy az S félcsoport teljesen egyszerű. Tegyük fel, indirekt módon, hogy S nem teljesen egyszerű. Akkor a 9.10. Tétel szerint S tartalmaz egy

$$C = \langle p, q; pq = e \rangle$$

biciklikus félcsoportot (itt az e idempotens elem a C egységeleme). Az világos, hogy

$$qp \in S^1p.$$

Mivel S jobb Putcha-félcsoport, ezért

$$qp = (qp)^m = xp^2$$

valamely $x \in S^1$ és alkalmas m pozitív egész számmal. Így

$$xe = xp^2q^2 = qpq^2 = q^2 \in C,$$

valamint

$$xep^2 = xp^2,$$

és ezért

$$qp = xp^2 = xep^2 = q^2p^2.$$

Ez viszont ellentmondás, mert C elemeit egyértelműen lehet előállítani $q^u p^v$ alakban. Tehát S valóban teljesen egyszerű.

Fordítva, tegyük fel, hogy S egy teljesen egyszerű félcsoport. Akkor a 9.27. Tétel szerint S izomorf egy P szendvicsmátrixú, G csoport feletti Rees-féle $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G; I, J; P)$ mátrixfélcsoporttal. Azonosítsuk S-et $\mathcal{M}$-mel. Legyenek $(a; i, j)$, $(b; k, n) \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$(a; i, j)(b; k, n) = (a; i, j)^2((p_{j,i}ap_{j,i})^{-1}p_{j,k}b; i, n) \in (a; i, j)^2 S,$$

amiből adódik, hogy S egy bal Putcha-félcsoport. Hasonlóan igazolható, hogy S jobb Putcha-félcsoport. □

10.25. Definíció *Egy A félcsoportnak valamely Q nullelemes félcsoporttal való S bővítéséről akkor mondjuk, hogy retrakt bővítés, ha (azonosítva A-t S azon ideáljával, amely szerinti Rees-féle faktorfélcsoportja izomorf Q-val) megadható S-nek A-ra olyan homomorfizmusa, amely A elemeit fixen hagyja.*

10.26. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *S idempotens elemet tartalmazó, arkhimédeszi bal és jobb Putcha-félcsoport,*

2. *S egy teljesen egyszerű félcsoportnak egy nil félcsoporttal való retrakt bővítése.*

Bizonyítás. Legyen S egy olyan arkhimédeszi bal és jobb Putcha-félcsoport, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 10.24. Tétel szerint S egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű K félcsoportnak az $N = S/K$ nil félcsoporttal való ideál-bővítése. Az világos, hogy egy bal és jobb Putcha-félcsoport tetszőleges ideálja is bal és jobb Putcha-félcsoport. Így K is jobb és bal Putcha-félcsoport. Ebből viszont a 10.24. Tétel szerint az következik, hogy K teljesen egyszerű, s ezért a 9.27. Tétel miatt izomorf egy $\mathcal{M}(I; G, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal. Mivel K gyengén reduktív a 9.28. Tétel miatt, ezért az 5.20. Tétel szerint K az $\Omega(K)$ transzlációs burok egy ideálja. A 9.29. Tétel szerint

$$\Omega(K) = \{(k, a, h) \in \mathcal{T}_I \times G \times \mathcal{T}_J : (\forall i \in I, j \in J)\ p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i} = p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az $\Omega(K)$ transzlációs burok két elemének (k, a, h)-nak és (f, b, g)-nek a szorzata

$$(k, a, h)(f, b, g) = (k \circ f, ap_{(j_0)h, f(i_0)}b, h \circ g).$$

Továbbá, ha $(g; i, j) \in K$ és $(k, a, h) \in \Omega(K)$ tetszőleges elemek, akkor

$$(k, a, h)(g; i, j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) \in K$$

és

$$(g; i, j)(k, a, h) = (gp_{j,k(i_0)}a; i, (j)h) \in K.$$

Egy $(k, a, h) \in \Omega(K)$ bitranszláció akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha k és h konstans transzformációk. Az 5.21. Tétel szerint $\Omega(K)$-nak van olyan $N = S/K$-val való $(S', +)$ ideálbővítése, amelynek S egy részfélcsoportja. Jelölje e az $\Omega(K)$ egységelemét. Akkor

$$\phi : \; x \mapsto x + e$$

S'-nek $\Omega(K)$-ra való retrakt homomorfizmusa. Az S' félcsoporton érvényes művelet ϕ által meg van határozva: Ha $x, y \in N^* = N - \{0\}$ és $s, t \in \Omega(K)$, akkor $x + t = \phi(x)t$, $t + x = t\phi(x)$, $s + t = st$; ha $xy \neq 0$ N-ben, akkor $x + y = xy$, ha $xy = 0$ N-ben akkor viszont $x + y = \phi(x)\phi(y)$. Megmutatjuk, hogy ϕ-nek S-re való leszűkítése S-nek K-ra való retrakt homomorfizmusa. Elegendő azt megmutatni, hogy minden $s \in N^*$ esetén $\phi(s) \in K$, azaz $\phi(s)$ a K egy belső bitranszlációja. Legyen s az N^* egy tetszőleges eleme, és legyen

$$\phi(s) = (k, a, h) \in \Omega(K).$$

Mivel N nil félcsoport, ezért

$$s^n \in K$$

valamely n pozitív egész számmal. Így

$$(k, a, h)^n = (k_0, b, h_0).$$

Legyen

$$(g; i, j) \in K$$

tetszőleges elem. Mivel S egy bal Putcha-félcsoport, ezért a 10.13. Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám és olyan $x \in S$ elem, hogy

$$(s(g; i, j))^m = s^n x.$$

Legyen

$$\phi(x) = (k_x, b_x, h_x) \in \Omega(K).$$

Akkor

$$((ap_{(j_0)h,i}gp_{j,k(i)})^{m-1}ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j)^m$$
$$= ((k, a, h)(g; i, j))^m = (\phi(s)(g; i, j))^m = (s(g; i, j))^m = \phi((s(g; i, j))^m) =$$
$$\phi(s^n x) = (k, a, h)^n \phi(x) = (k_0, b, h_0)(k_x, b_x, h_x) = (k_0, bp_{h_0,k_x(i_0)}b_x, (h_0)h_x).$$

Ebből
$$k(i) = k_0$$
adódik minden $i \in I$ indexre, azaz k konstans transzformáció. Az S-re vonatkozó jobb Putcha feltétel felhasználásával, hasonlóan bizonyítható, hogy h is konstans transzformáció. Így
$$\phi(s) \in K.$$
Ezzel bebizonyítottuk, hogy (1)-ből következik (2).

Mivel egy teljesen egyszerű félcsoport arkhimédeszi jobb és bal Putcha-félcsoport, ezért könnyen ellenőrizhető, hogy (2)-ből következik (1). □

10.3. Félcsoportok erős félhálója

10.27. Definíció *Legyen Y egy félháló, és legyenek S_α ($\alpha \in Y$) tetszőleges félcsoportok úgy, hogy $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ minden $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta \in Y$) esetén. Tegyük fel, hogy minden $\alpha \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in Y$) esetén van olyan $(\cdot)\phi_{\alpha,\beta}$ homomorf leképezése S_α-nak S_β-ba, hogy az alábbiak teljesülnek*

(1) $\phi_{\alpha,\alpha} = id_{S_\alpha}$, ($\alpha \in Y$),

(2) $\phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$ minden $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in Y$) esetén.

Az $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Ha $a \in S_\alpha$ és $b \in S_\beta$, akkor legyen
$$a * b = (a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\phi_{\beta,\alpha\beta},$$
ahol a jobb oldalon $(a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ és $(b)\phi_{\beta,\alpha\beta}$ között az $S_{\alpha\beta}$ félcsoportbeli műveletet kell tekinteni. Könnyen ellenőrizhető, hogy S erre a műveletre nézve félcsoportot alkot, és S az S_α félcsoportok Y félhálója. Ezt a félcsoportot az S_α félcsoportok erős félhálójának nevezzük és $S = [Y;\ S_\alpha,\ \phi_{\alpha,\beta}]$-val jelöljük. A $\{\phi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \geq \beta}$ leképezés-családot az S-en értelmezett műveletet meghatározó homomorfizmusok tranzitív rendszerének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\alpha > \beta$ esetén $S_\alpha \cup S_\beta$ retrakt bővítése S_β-nak.

Egy S félcsoportot Clifford-félcsoportnak nevezünk, ha S reguláris és idempotensei S minden elemével felcserélhetőek. A 6.20. Tétel szerint minden Clifford-félcsoport inverz félcsoport. A következő tétel a Clifford-félcsoportok szerkezetéről is fontos információt ad.

10.28. Tétel *Tetszőleges S félcsoport esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

(1) S részcsoportok félhálója.

(2) S részcsoportok erős félhálója.

(3) S Clifford-félcsoport.

Bizonyítás. Világos, hogy az (1) és (2) feltételek ekvivalenciájához elegendő csak azt bizonyítani, hogy (1)-ből következik (2). Legyen az S félcsoport a G_α részcsoportok Y félhálója ($\alpha \in Y$). Legyenek α és β tetszőleges Y-beli elemek az $\alpha \geq \beta$ feltétellel. Ha e_β jelöli G_β egységelemét, akkor

$$\varphi_{\alpha,\beta}: \ a \mapsto ae_\beta \ (a \in G_\alpha)$$

a G_α részcsoportnak a G_β részcsoportba való leképezése. Mivel tetszőleges $a, b \in G_\alpha$ esetén

$$(ab)\varphi_{\alpha,\beta} = (ab)e_\beta = a(be_\beta) = a(e_\beta(be_\beta) = (ae_\beta)(be_\beta) = (a)\varphi_{\alpha,\beta}(b)\varphi_{\alpha,\beta},$$

ezért $\varphi_{\alpha,\beta}$ homomorfizmus. Az világos, hogy

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = id_{G_e}$$

minden $\alpha \in Y$-ra. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ tetszőleges elemek úgy, hogy $\alpha \geq \ \beta \geq \gamma$. Akkor

$$e_\beta e_\gamma = (e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma}$$

miatt $e_\beta e_\gamma$ a G_γ egységeleme, azaz

$$e_\beta e_\gamma = e_\gamma.$$

Ezért tetszőleges $a \in G_\alpha$ esetén

$$(a)\varphi_{\alpha,\gamma} = ae_\gamma = ae_\beta e_\gamma = (a)\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\beta,\gamma}.$$

Továbbá, tetszőleges $\alpha, \beta \in Y$ és tetszőleges $a \in G_\alpha, b \in G_\beta$ esetén

$$ab = (ab)e_{\alpha\beta} = (ae_{\alpha\beta})(be_{\alpha\beta}) = (a)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

Ezért S a G_α ($\alpha \in Y$) részcsoportok erős félhálója.

A következőkben megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy az S félcsoport G_α ($\alpha \in Y$) csoportok erős félhálója. Az világos, hogy S minden eleme reguláris. Az S idempotens elemei a G_α csoportok egységelemei. Ha $e_\alpha \in G_\alpha$ idempotens elem $b_\alpha (\in G_\beta)$ pedig tetszőleges elem S-ben, akkor

$$e_\alpha b_\beta = (e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} =$$

$$= (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = ((b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta})e_{\alpha\beta} = (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta}(e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta} = b_\beta e_\alpha.$$

Tehát S Clifford-félcsoport

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy (3)-ből következik (1). Legyen S egy Clifford-félcsoport. Akkor (definíció szerint) S reguláris és S idempotensei felcserélhetőek S bármelyik elemével. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Mivel S reguláris, ezért van S-nek olyan x eleme, amelyre $axa = a$ teljesül. A 6.2. Lemma szerint ax és xa idempotens elemek. Igy ezek az elemek az S tetszőleges elemével felcserélhetőek, azaz benne vannak az S félcsoport $Z(S)$ centrumában. Emiatt

$$xa = xaxa = x(ax)a = (ax)xa = ax(xa) = a(xa)x = axax = ax.$$

Igy az S félcsoport teljesen reguláris (lásd a 6.15. Definíciót). A 6.16. Tétel szerint S előáll csoportok uniójaként. Az 1.42. Tétel szerint S előáll diszjunkt G_i $(i \in I)$ részcsoportok úniójaként. Megmutatjuk, hogy S a G_i $(i \in I)$ csoportok félhálója. Jelölje e_i, illetve e_j a G_i, illetve G_j $(i, j \in I)$ részcsoport egységelemét. Mivel $e_i, e_j \in Z(S)$, ezért

$$e_i e_j = e_j e_i.$$

Továbbá,

$$(e_i e_j)^2 = e_i^2 e_j^2 = e_i e_j,$$

azaz van olyan G_k $(ki \in I)$ részcsoport, hogy $e_i e_j = e_j e_i$ a G_k egységeleme. Jelölje ezt az egységelemet e_k. Ha $a \in G_i$ és $b \in G_j$ tetszőleges elemek, akkor ($e_i, e_j \in Z(S)$ miatt)

$$(ab)e_k = (ab)(e_i e_j) = (ae_i)(be_j) = ab$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$e_k(ab) = ab, \ (ba)e_k = ba, \ e_k(ba) = ba.$$

Tehát

$$ab, ba \in e_k S \cap S e_k = e_k S e_k.$$

Igy

$$G_i G_j, G_j G_i \subseteq e_k S e_k.$$

Jelölje a^{-1}, illetve b^{-1} az $a \in G_i$, illetve $b \in G_j$ elem G_i, illetve G_j csoportbeli inverzét. Az előzőek szerint

$$b^{-1}a^{-1}, a^{-1}b^{-1} \in e_k S e_k.$$

Igy

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ae_j a^{-1} = e_j(aa^{-1}) = e_i e_j = e_k$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = e_k, \ (ba)(a^{-1}b^{-1}) = e_k, \ (a^{-1}b^{-1})(ba) = e_k.$$

Az 1.41. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$ab, ba \in G_{e_k},$$

ahol G_{e_k} jelöli az S félcsoport azon maximális részcsoportját, amelyben e_k az egységelem. Az világos, hogy

$$G_{e_k} = G_k.$$

Igy

$$ab, ba \in G_k.$$

Következésképpen

$$G_iG_j, G_jG_i \subseteq G_k.$$

Ebből már következik, hogy az S félcsoport a G_i $(i \in I)$ részcsoportok félhálója. $\square$

10.4. Kötegek

Az előzőekben már definiáltuk a köteg fogalmát (1.38. Definíció). A kötegek vizsgálatában fontos szerepet játszanak a derékszögű kötegek. Lássuk ezek egyik definícióját!

10.29. Definíció *Legyenek A és B tetszőleges nem üres halmazok. Az $A \times B$ Descartes-szorzaton definiáljunk egy műveletet a következőképpen: Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) tetszőleges $A \times B$-beli elemek, akkor legyen $(a, b)(c, d) = (a, d)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel egy asszociatív műveletet definiáltunk $A \times B$-n. Az így definiált félcsoportot derékszögű kötegnek nevezzük.*

A következő tétel a derékszögű kötegek jellemzésével foglalkozik. Szerepet játszik benne a félcsoportok (külső) direkt szorzata . Valamely A és B félcsoportok (külső) direkt szorzatán értjük azt a félcsoportot, melynek alaphalmaza az $A \times B$ Descartes-szorzat, és tezsőleges $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ elempárok esetén $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$.

10.30. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

(1) S derékszögű köteg;

(2) S sehol sem kommutatív (azaz, minden $a, b \in S$ esetén $ab = ba$-ből $a = b$ következik);

(3) S köteg és teljesíti az $aba = a$ azonosságot;

(4) S köteg és teljesíti az $abc = ac$ azonosságot;

(5) S egy balzéró és egy jobbzéró félcsoport (külső) direkt szorzata.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy (1)-ből következik (2). Megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3): Legyen S sehol sem kommutatív félcsoport. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén a és a^2 egymással felcserélhetők, ezért $a = a^2$, azaz S köteg. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$a(aba) = aba = (aba)a,$$

ezért

$$a = aba.$$

Így S teljesíti (3)-at.

Most belátjuk, hogy (3)-ból következik (4): Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$abc = (aca)(bc) = a(cabc) = ac.$$

Tehát S teljesíti (4)-et.

Megmutatjuk, hogy (4)-ből következik (5): Tegyük fel, hogy S teljsíti (4)-t. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Legyen $L = Sa$ és $R = aS$. Akkor $sata = sa$ és $asat = at$ $(s, t \in S)$ miatt L egy balzéró, R pedig egy jobbzéró félcsoport. Megmutatjuk, hogy $S \cong L \times R$. Az $(sa, at) \in L \times R$ elemmel legyen $\phi((sa, at)) = sat$. Mivel minden $s \in S$ elemre $s = sas$, ezért ϕ szürjektív. Megmutatjuk, hogy ϕ injektív. Tegyük fel, hogy $\phi((sa, at)) = \phi((ua, av))$ valamely $s, t, u, v \in S$ elemekre. Akkor $sat = uav$ és így

$$sa = sata = uava = ua,$$

valamint

$$at = asat = auav = av.$$

Tehát

$$(sa, at) = (ua, av),$$

amely azt eredményezi, hogy ϕ injekív. Mivel

$$\phi((sa, at)(ua, av)) = \phi((sa, av)) = sav$$

és

$$\phi((sa, at))\phi((ua, av)) = (sat)(uav) = sav,$$

ezért ϕ homomorfizmus. Tehát ϕ egy izomorf leképezése az $L \times R$ direkt szorzatnak az S-re. Már csak annak igazolása van hátra, hogy (5)-ből következik (1). De ez a derékszögű köteg definíciója alapján nyilvánvaló. $\square$

10.31. Tétel *Tetszőleges S köteg esetén*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : \ a = aba \ \textit{és} \ b = bab\}$$

az S legszűkebb félháló-kongruenciája.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy σ reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy σ tranzitív. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$ és $b\sigma c$ teljesül az S köteg valamely a, b, c elemeire. Akkor

$$a = aba = a(bcb)a = ab(cba)(cba) = a(bcb)a(cba) = (aba)(cba) = acba$$

és, hasonlóan,

$$a = abca.$$

Ezekből viszont

$$a = (acba)(abca) = (ac)(bab)(ca) = a(cbc)a = aca$$

adódik. Hasonló módon bizonyítható, hogy

$$c = cac.$$

Igy $a\sigma c$. Tehát σ tranzitív.

Megmutatjuk, hogy σ jobbkongruencia. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$. Akkor

$$(ac)(abc)(ac) = (ac)(abc)(abac) = a(cab)(cab)(ac) = a(cab)(ac)$$

$$= (ac)(abac) = (ac)(ac) = ac,$$

$$(abc)(ac)(abc) = (ab)(ca)(ca)(bc) = (ab)(ca)(bc) = (abc)(abc) = abc.$$

Így $ac\sigma abc$. Továbbá,

$$(bc)(abc)(bc) = (bc)(abc) = (babc)(abc) = b(abc)(abc) = (bab)c = bc,$$

és

$$(abc)(bc)(abc) = (abc)(abc) = abc.$$

Így $bc\sigma abc$. Mivel σ tranzitív, ezért $ac\sigma bc$. Tehát σ jobbkongruencia. Hasonlóan bizonyítható, hogy σ balkongruencia. Ezért σ kongruencia. Mivel

$$ab = (ab)(ba)(ab)$$

és

$$ba = (ba)(ab)(ba),$$

ezért $ab\sigma ba$. Így S/σ kommutatív köteg, azaz félháló.

Legyen τ az S köteg tetszőleges félháló-kongruenciája. Akkor az $a\sigma b$ feltételt teljesítő $a, b \in S$ elemekre

$$a = aba\tau bab = b$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $\sigma \subseteq \tau$, azaz σ az S köteg legszűkebb félháló-kongruenciája.$\square$

10.32. Következmény *Minden köteg derékszögű kötegek félhálója.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges köteg. A 10.31. Tétel szerint

$$\sigma = \{(a,b) \in S \times S: \ a = aba \text{ és } b = bab\}$$

az S legszűkebb félháló-konguenciája. Ha A az S egy σ-osztálya, akkor bármely $a, b \in A$ esetén $(a,b) \in \sigma$ miatt $a = aba$. Tehát A-ban teljesül a 10.30. Tétel (3)-as feltételében szereplő azonosságot, s ezért A derékszögű köteg. Tehát az S köteg derékszögű kötegek félhálója. $\square$

10.33. Tétel *Legyen Y félháló. Tetszőleges $\gamma \in Y$ elem esetén legyenek L_γ és R_γ tetszőleges nem üres halmazok úgy, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\delta \neq \gamma$. Legyen $S_\gamma = L_\gamma \times R_\gamma$. Minden $\gamma \geq \delta$ esetén legyenek adottak valamely $\alpha_{\delta,\gamma} : S_\gamma \ \to \mathcal{T}(L_\delta)$ és $\beta_{\gamma,\delta} : S_\gamma \ \to \mathcal{T}(R_\delta)$ függvények. Jelölje $\alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)}$, illetve $\beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)}$ az $(i,\mu) \in S_\gamma$ elemhez az $\alpha_{\delta,\gamma}$, illetve $\beta_{\gamma,\delta}$ által rendelt $\mathcal{T}(L_\delta)$-beli, illetve $\mathcal{T}(R_\delta)$-beli elemet.*

Tegyük fel, hogy minden $\gamma, \delta \in Y$ és minden $(i,\mu) \in S_\gamma$, $(j,\nu) \in S_\delta$ elemekre teljesülnek a következők.

(1) $[\alpha_{\gamma,\gamma}^{(i,\mu)}] = i$, $[\beta_{\gamma,\gamma}^{(i,\mu)}] = \mu$,

(2) $[\alpha_{\gamma\delta,\gamma}^{(i,\mu)} \alpha_{\gamma\delta,\delta}^{(j,\nu)}] = k$, $[\beta_{\gamma,\gamma\delta}^{(i,\mu)} \alpha_{\delta,\gamma\delta}^{(j,\nu)}] = \xi$ valamely $(k,\xi) \in S_{\gamma\delta}$ elemre,

(3) a (2) jelöléseit használva, minden $\epsilon < \gamma\delta$ esetén $\alpha_{\epsilon,\gamma\delta}^{(k,\xi)} = \alpha_{\epsilon,\gamma}^{(i,\mu)} \alpha_{\epsilon,\delta}^{(j,\nu)}$ $\beta_{\gamma\delta,\epsilon}^{(k,\xi)} = \beta_{\gamma,\epsilon}^{(i,\mu)} \beta_{\delta,\epsilon}^{(j,\nu)}$.

Legyen $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$. A fenti jelöléseket használva, definiáljunk egy $*$ műveletet S-en a következőképpen $(i,\mu) * (j,\nu) = (k,\xi)$. Akkor $(S,*)$ köteg. Fordítva, minden köteget így lehet konstruálni.

Bizonyítás. Annak bizonyítása, hogy $(S,*)$ köteg, technikai jellegű. Ahhoz, hogy minden köteget a tételben részletezett módon lehet konstruálni, tekintsünk egy tetszőleges S köteget. A 10.32. Következmény szerint S előáll S_γ derékszögű kötegek Y félhálójaként. A 10.30. Tétel miatt minden $\gamma \in Y$ esetén vannak olyan L_γ balzéró és R_γ jobbzéró félcsoportok, hogy $S_\gamma \cong L_\gamma \times R_\gamma$. S_γ-t azonosítani fogjuk $L_\gamma \times R_\gamma$-val, és S-et $S = \cup_{\gamma \in Y}(L_\gamma \times R_\gamma)$ formában tekintjük. Természetesen feltehetjük, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\gamma \neq \delta$.

Legyenek γ és δ tetszőleges Y-beli elemek úgy, hogy $\gamma \geq \delta$. Legyen $(i,\mu) \in S_\gamma$ tetszőleges. Ha $(j,\nu) \in S_\delta$, akkor $(i,\mu)(j,\nu) = (k,\xi) \in S_\delta$, és így

$$(k,\xi) = (i,\mu)(j,\nu)[(i,\mu)(j,\nu)](j,\nu) = (k,\xi)(j,\nu) = (k,\nu),$$

és ezért $\xi = \nu$. Ha $(j,\sigma) \in S_\delta$, akkor

$$(i,\mu)(j,\sigma) = (i,\mu)[(j,\nu)(j,\sigma)] = [(i,\mu)(j,\nu)](j,\sigma) = (k,\nu)(j,\sigma) = (k,\sigma)$$

amely azt mutatja, hogy k nem függ a ν-től. Igy definiálhatunk egy $\alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)}$ függvényt L_δ-n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(i,\mu)(j,\nu) = (\alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)} j,\nu)\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ (j,\nu) \in S_\delta\ \gamma \geq \delta).$$

Ennek duálisaként, definiálhatunk egy $\beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)}$ függvényt R_δ-n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(j,\nu)(i,\mu) = (j,\nu\beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)})\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ (j,\nu) \in S_\delta\ \gamma \geq \delta).$$

Ez lehetővé teszi, hogy definiáljuk a következő függvényeket.

$$\alpha_{\delta,\gamma} : (i,\mu) \ \mapsto\ \alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)},\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ \gamma \geq \delta$$

$$\beta_{\gamma,\delta} : (i,\mu) \ \mapsto\ \beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)},\ ((i,\mu) \in S_\gamma,\ \gamma \geq \delta.$$

(1) közvetlenül következik $\alpha_{\delta,\gamma}^{(i,\mu)}$ és $\beta_{\gamma,\delta}^{(i,\mu)}$ definíciójából. Legyen $(i,\mu) \in S_\gamma$ és $(j,\nu) \in S_\delta$. Akkor $(i,\mu)(j,\nu) = (k,\xi)$ valamely $(k,\xi) \in S_{\gamma\delta}$-ra. Legyen $\epsilon \leq \gamma\delta$ és legyen $(l,\eta) \in S_\epsilon$. Akkor

$$(\alpha_{\epsilon,\gamma\delta}^{(k,xi)} l,\eta) = (k,\xi)(l,\eta) = (i,\mu)(j,\nu)(l,\eta) = (\alpha_{\epsilon,\gamma}^{(i,\mu)}\alpha_{\epsilon,\delta}^{(j,\nu)} l,\eta)$$

és így

$$\alpha_{\epsilon,\gamma\delta}^{(k,\xi)} = \alpha_{\epsilon,\gamma}^{(i,\mu)}\alpha_{\epsilon,\delta}^{(j,\nu)}.$$

Ebből következik a (2) formula; az $\epsilon = \gamma\delta$ választás mellett pedig az (1) formula. Ugyanebből adódik (3) első képlete, ha feltesszük, hogy $\epsilon < \gamma\delta$. A (2) és (3) második képlete az első képletek duálisai. A (2)-ből és (k,ξ) definíciójából adódik, hogy $(i,\mu)(j,\nu) = (i,\mu) * (j,\nu)$. Ezzel a tétel első részét bebizonyítottuk.

A fordított állítás bizonyítása egyszerű. □

Feladatok

10.1. Feladat *(Megoldás: 17.30.) Egy S félcsoport valamely F részfélcsoportját filternek nevezzük, ha S tetszőleges a,b elemei esetén $ab \in F$-ből $a,b \in F$ következik. Legyen J egy S félcsoport filtereinek valamely nem üres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy*

$$\sigma_J = \{(a,b) \in S \times S :\ (\forall F \in J)\ a,b \in F \text{ vagy } a,b \notin F\}$$

az S félcsoport egy félháló-kongruenciája.

10.2. Feladat *(Megoldás: 17.31.) Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport tetszőleges félháló-kongruenciája az előző feladatban szereplő módon konstruálható!*

10.3. Feladat *(Megoldás: 17.32.) A 10.8. Következmény felhasználása nélkül mutassuk meg, hogy minden arkhimédeszi félcsoport félháló-felbonthatatlan.*

10.4. Feladat *(Megoldás: 17.33.) Egy S félcsoportot gyengén kommutatív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek és olyan n pozitív egész szám, amelyekre $(ab)^n = xa = by$ teljesül. Mutassuk meg, hogy gyengén kommutatív S félcsoport előáll arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként!*

10.5. Feladat *(Megoldás: 17.34.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoport arkhimédeszi komponensei gyengén kommutatívak!*

11. fejezet

Félcsoportok szubdirekt szorzata

11.1. Definíció *Akkor mondjuk, hogy egy S félcsoport az S_i $(i \in I)$ félcsoportok szubdirekt szorzata, ha az S_i $(i \in I)$ félcsoportok direkt szorzatának van olyan S-sel izomorf T részfélcsoportja, hogy a direkt szorzat S_i $(i \in I)$ félcsoportokra való projekcióinak T-re való leszűkítése szürjektív.*

11.2. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha α_i $(i \in I)$ az S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_S$ teljesül, akkor S az S/α_i $(i \in I)$ faktorfélcsoportok szubdirekt szorzata. Fordítva, ha S az S_i $(i \in I)$ félcsoportok szubdirekt szorzata, akkor megadhatók S-nek olyan S/α_i $(i \in I)$ kongruenciái, amelyekre $\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_S$, valamint $S_i \cong S/\alpha_i$ $(i \in I)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport, valamint α_i $(i \in I)$ az S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_S$ teljesül. Jelölje S_i $(i \in I)$ az S/α_i faktorfélcsoportot. Képezzük a $\prod_{i\in I} S_i$ direkt szorzatot. Jelölje φ S-nek a direkt szorzatba való következő leképezését: tetszőleges $s \in S$ elem esetén legyen $\varphi(s)$ a direkt szorzat azon eleme, amely tetszőleges $i \in I$ indexhez az $S_i = S/\alpha_i$ félcsoport azon elemét, azaz S azon α_i szerini osztályát rendeli, amely az s elemet tartalmazza. Képletszerűen:

$$(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}.$$

Az világos, hogy φ egyértelmű leképezés. Mivel tetszőleges $s, t \in S$ esetén

$$(\varphi(st))(i) = [st]_{\alpha_i} = [s]_{\alpha_i}[t]_{\alpha_i} = (\varphi(s))(i)(\varphi(t))(i) = ((\varphi(s)(\varphi(t))(i),$$

ezért φ az S félcsoportnak a direkt szorzatba való homomorf leképezése. A következőkben megmutatjuk, hogy φ injektív. Tegyük fel, hogy

$$\varphi(s) = \varphi(t)$$

valamely $s, t \in S$ elemekre. Akkor minden $i \in I$ indexre

$$(\varphi(s))(i) = (\varphi(t))(i),$$

azaz

$$[s]_{\alpha_i} = [t]_{\alpha_i}$$

teljesül, amiből az adódik, hogy

$$(s,t) \in \cap_{i\in I}\alpha_i.$$

Mivel $\cap_{i\in I}\alpha_i = id_S$, ezért

$$s = t.$$

Tehát φ valóban injektív. Jelölje S^* az S félcsoport φ szerinti képét. Legyen $i \in I$ tetszőleges index. Tekintsük az $S_i = S/\alpha_i$ félcsoport $[s]_{\alpha_i}$ elemét. A $\varphi(s) \in S^*$ elemnek a π_i projekció szerinti képe $(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}$. Így a π_i projekciónak az S^* félcsoportra való leszűkítése szürjektív. Következésképpen S^* és így S az S_i $(i \in I)$ félcsoportok szubdirekt szorzata.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport előáll bizonyos S_i $(i \in I)$ félcsoportok szubdirekt szorzataként. Akkor van az S_i $(i \in I)$ félcsoportok direkt szorzatának olyan S^* részfélcsoportja, hogy S izomorf S^*-gal és a π_i $(i \in I)$ projekcióknak S^*-ra való leszűkítései szürjektívek minden $i \in I$ index esetén. Azonosítsuk S-et S^*-gal, s jelölje α_i $(i \in I)$ a π_i homomorfizmus S-re való leszűkítésének magját. Tegyük fel, hogy

$$(s,t) \in \cap_{i\in I}\alpha_i.$$

Akkor minden π_i $(i \in I)$ esetén

$$\pi_i(s) = \pi_i(t)$$

teljesül, amiből az $s = t$ egyenlőség következik. Tehát $\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_S$. □

11.3. Definíció *Egy S félcsoportot szubdirekt irreducibilis félcsoportnak nevezünk, ha bárhogy is áll elő S_i $(i \in I)$ félcsoportok szubdirekt szorzataként, van legalább egy olyan $j \in I$ index, melyhez tartozó projekcióhomomorfizmus S-et izomorf módon képezi S_i-re.*

11.4. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha kongruenciáinak tetszőleges $\alpha_i, i \in I$ családja esetén $\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_S$ akkor és csak akkor teljesül, ha van legalább egy $j \in I$ index, hogy $\alpha_j = \iota_S$.*

Bizonyítás. A 11.2. Tétel alapján nyilvánvaló. □

A szubdirekt irreducibilis félcsoportok szerepét mutatja a következő tétel:

11.5. Tétel *(Birkhoff-tétel) Minden félcsoport felbontható szubdirekt irreducibilis félcsoportok szubdirekt szorzatára.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha S egyelemű, akkor a tétel állítása nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 2$. Az S félcsoport tetszőleges, egymástól különböző a és b elemei esetén jelölje $P_{a,b}$ az S félcsoport mindazon Φ kongruenciáinak halmazát, amelyre $(a,b) \notin \Phi$ teljesül. $P_{a,b} \neq \emptyset$, mert $\iota_S \in P_{a,b}$. A $P_{a,b}$ halmaz a relációk tartalmazására nézve részben rendezett. Legyen

$$\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \cdots \subseteq \alpha_n \subseteq \ldots$$

$P_{a,b}$-beli kongruenciák egy mononon növekedő sorozata. Az világos, hogy

$$\cup_{i=1}^{n} \alpha_i \in P_{a,b}.$$

Tehát $P_{a,b}$ minden részláncának van $P_{a,b}$-ben felső korlátja. A Zorn-Lemma miatt $P_{a,b}$-ban van maximális elem. Jelöljön $\psi(a,b)$ egy maximális elemet.

Következő lépésként megmutatjuk, hogy az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoportok minden $(a,b) \in S \times S$ $a \neq b$ elempár esetén szubdirekt irreducibilisek. Legyenek $\alpha_i/\psi(a,b)$ $(i \in I)$ az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoport olyan kongruenciái, amelyekre

$$\cap_{i \in I}(\alpha_i/\psi(a,b)) = \iota_{S/\psi(a,b)}$$

teljesül. A 2.30. Tétel szerint S-ben

$$\cap_{i \in I} \alpha_i = \psi(a,b).$$

Mivel $\psi(a,b)$ maximális S azon α kongruenciái között, melyekre $(a,b) \notin \alpha$ teljesül, ezért van olyan $j \in I$ index, hogy

$$\alpha_j = \psi(a,b),$$

azaz

$$\alpha_j/\psi(a,b) = \iota_{S/\psi(a,b)}.$$

A 11.4. Tétel miatt ez éppen azt jelenti, hogy az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoport szubdirekt irreducibilis.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az S félcsoport előáll az $S/\psi(a,b)$ $(a,b \in S, a \neq b)$ faktorfélcsoportok szubdirekt szorzataként. A 11.2. Tétel miatt elegendő megmutatni, hogy

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S.$$

Legyenek $x,y \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$x \neq y.$$

Akkor

$$(x,y) \notin \psi(x,y),$$

amiből

$$(x,y) \notin \cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b)$$

következik. Tehát

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S. \qquad \square$$

11.1. Szubdirekt irreducibilis félcsoportok

11.6. Tétel *Tetszőleges S félcsoportban a következő három feltétel egymással ekvivalens.*

(1) S szubdirekt irreducibilis.

(2) S^1 szubdirekt irreducibilis.

(3) S^0 szubdirekt irreducibilis.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $S^1 \neq S$ és $S^0 \neq S$. Először is megjegyezzük, hogy ha α egy S^1 félcsoport olyan kongruenciája, melynek S-re való α^* leszűkítésére $\alpha^* = \iota_S$ teljesül, akkor $\alpha = \iota_{S^1}$. Ugyanis, ha $a \in S$-re $(a, 1) \in \alpha$ teljesül, akkor minden $b \in S$ elem esetén $(ab, b) \in \alpha$ és $(ba, b) \in \alpha$, amiből $ab = ba = b$ következik, hiszen $ab, ba \in S$, és $b \in S$ α-osztálya csak b-t tartalmazza. Azt kaptuk, hogy a az S félcsoport egységeleme, s ezért $S = S^1$, ami ellentmond az $S \neq S^1$ feltételnek.

(1)-ből következik (2): Tegyük fel, hogy S szubdirekt irreducibilis félcsoport. Legyen α_i $(i \in I)$ az S^1 kongruenciáinak olyan családja, melyre

$$\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_{S^1}$$

teljesül. Jelölje α_i^* az α_i $(i \in I)$ kongruencia S-re való leszűkítését. Akkor

$$\cap_{i\in I}\alpha_i^* = \iota_S.$$

Mivel az S félcsoport szubdirekt irreducibilis, ezért valamely $j \in I$ indexre

$$\alpha_j^* = id_S.$$

Az előzőekben tett megjegyzés szerint ebből

$$\alpha_j = id_{S^1}$$

következik. A 11.4. Tétel szerint S^1 szubdirekt irreducibilis.

(2)-ből következik (1): Legyen S^1 szubdirekt irreducibilis. Legyen α_i^* $(i \in I)$ az S félcsoport kongruenciáinak olyan családja, amelyre

$$\cap_{i\in I}\alpha_i^* = \iota_S$$

teljesül. Tetszőleges $i \in I$ indexre jelölje α_i az S^1 félcsoport azon ekvivalenciarelációját, amely szerint az S^1 félcsoport egységeleme önállóan alkot egy osztályt, az S elemeinek α_i-osztálya megegyezik az S-beli α_i^*-osztályával. Könnyen ellenőrizhető, hogy α_i kongruencia az S^1 félcsoporton és

$$\cap_{i\in I}\alpha_i = \iota_{S^1}.$$

Mivel S^1 szubdirekt irreducibilis, ezért

$$\alpha_j = \iota_{S^1}$$

valamely $j \in I$ indexre, amiből

$$\alpha_j^* = \iota_S$$

következik. Így S szubdirekt irreducibilis, azaz (1) teljesül.

Az (1) és (3) feltételek ekvivalenciája az előzőekhez hasonlóan bizonyítható a következők figyelembevételével: Ha α egy S^0 félcsoport olyan kongruenciája, melynek S-re való α^* leszűkítésére $\alpha^* = \iota_S$ teljesül, akkor $\alpha = \iota_{S^0}$. Ugyanis, ha $(a, 0) \in \alpha$, akkor minden $b \in S$ elemre $(ab, 0) \in \alpha$ és $(ba, 0) \in \alpha$, amiből $ab, ba \in S$ miatt $ab = ba = a$ következik, azaz a az S nulleleme, s ezért $S = S^0$, ami ellentmond az $S \neq S^0$ feltételnek. Ebből a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy az (1) és (3) feltételek egymással ekvivalensek. $\square$

11.7. Definíció *Egy S félcsoport szívén (ha létezik) az S azon legalább kételemű ideálját értjük, amelyet az S minden legalább kételemű ideálja részhalmazként tartalmaz. Egy kételemű szívet primitív szívnek nevezünk.*

Ha K egy S félcsoport szíve, akkor $K^2 (\subseteq K)$ ideálja S-nek, és így $K^2 = K$ vagy $K^2 = \{0\}$. Az első esetben azt mondjuk, hogy K globálisan idempotens , a második esetben pedig azt, hogy K nilpotens .

11.8. Definíció *Egy S félcsoport valamely c elemét diszjunktív elemnek nevezzük, ha a*

$$\mathcal{P}^1_{\{c\}} = \{(a, b) \in S \times S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xay = c \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad xby = c\}$$

kongruencia egyenlő az S félcsoport identikus relációjával.

11.9. Tétel *Ha egy nullelemes S félcsoportnak van nem-nulla diszjunktív eleme, akkor S-nek van szíve, valamint az is igaz, hogy S összes diszjunktív eleme benne van ebben a szívben.*

Bizonyítás. Legyen k egy S félcsoport nem-nulla diszjunktív eleme. Mivel

$$r(k) = \{s \in S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xsy \neq k\}$$

egy $\mathcal{P}^1_{\{k\}}$-osztály és egyben egy ideálja is S-nek, ezért

$$r(k) = \{0\},$$

mivel $\mathcal{P}^1_{\{k\}} = \iota_S$. Legyen I az S olyan ideálja, amely tartalmaz a nullelemtől különböző elemet. Mivel $r(k) = \{0\}$, ezért az I tetszőleges $a \neq 0$ eleme esetén mindig megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$xay = k.$$

Így

$$k \in I.$$

Mivel a nullelemtől különböző k diszjunktív elem benne van minden nem-nulla ideálban, ezésrt S-nek van K szíve. Az előzőekből az is következik, hogy S összes diszjunktív eleme benne van K-ban □

11.10. Tétel *Minden legalább kételemű szubdirekt irreducibilis S félcsoportnak van legalább két diszjunktív eleme.*

Bizonyítás. Legyen S szubdirekt irreducibilis félcsoport. Minden $c \in S$ elemhez tekintsük a 2.33. Tételben definiált $\mathcal{P}^1_{\{c\}}$ kongruenciát. A 2.33. Tétel szerint $\{c\}$ egy $\mathcal{P}^1_{\{c\}}$-osztály. Így

$$\cap_{c \in S} \mathcal{P}^1_{\{c\}} = \iota_S.$$

Mivel S szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.4. Tétel miatt van olyan $d_1 \in S$ elem, amelyre $\mathcal{P}^1_{\{d_1\}} = \iota_S$ teljesül, azaz d_1 az S félcsoport diszjunktív eleme. Az is világos, hogy

$$\cap_{(c \in S \setminus \{d_1\})} \mathcal{P}^1_{\{c\}} = \iota_S. \qquad \square$$

Ugyancsak az S félcsoport szubdirekt irreducibilitását használva, azt kapjuk, hogy van olyan $d_2 (\neq d_1)$ eleme S-nek, amelyre $\mathcal{P}^1_{\{d_2\}} = \iota_S$ teljesül, azaz d_2 az S félcsoport d_1-től különböző diszjunktív eleme.

Az előző tétel miatt, ha egy szubdirekt irreducibilis félcsoportnak primitív a szíve, akkor szükségképpen diszjunktív a nulleleme. Nem bizonyítjuk, de érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, azaz igaz a következő tétel:

11.11. Tétel *Egy primitív szívű félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha a nulleleme diszjunktív.*

11.12. Definíció *Egy nullelemes S félcsoport A_S annullátorán értjük S mindazon x elemienek összességét, melyekre $xS = Sx = \{0\}$ teljesül.*

11.13. Tétel *Egy nemtriviális annullátorú félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.*

Bizonyítás. Legyen S egy nemtriviális A_S annullátorú félcsoport. Akkor S-nek van legalább két eleme.

Ha S szubdirekt irreducibilis, akkor a 11.10. Tétel szerint S-nek van legalább két diszjunktív eleme, így van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy S-nek van a nullelemtől különböző k diszjunktív eleme. Akkor a 11.9. Tétel szerint S-nek van K szíve, amely tartalmazza S összes diszjunktív elemét. Legyen $g \in A_S \setminus \{0\}$ tetszőleges. Akkor tetszőleges $u \in S$ elem esetén

$$ug = gu = 0.$$

Így

$$g \in r(k) \cup \{k\}.$$

Mivel $r(k) = \{0\}$, ezért $g = k$, így $A_S = \{0, k\} = K$, amiből az következik, hogy a K szív primitív. Megmutatjuk, hogy 0 az S diszjunktív eleme. Legyenek $e \neq f$ az S teszőleges elemei. Mivel k diszjunktív, ezért

$$(e, f) \notin \mathcal{P}^1_{\{k\}}.$$

Így megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$xey = k, \quad xfy \neq k$$

teljesül. Ha

$$xfy = 0,$$

akkor

$$(e, f) \notin \mathcal{P}^1_{\{0\}}.$$

Ha pedig

$$xfy \neq 0,$$

akkor megadhatók olyan $u, v \in S^1$ elemek, hogy

$$uxfyv = k,$$

mivel $r(k) = \{0\}$. Mivel $xfy \neq k$, ezért u és v egyike benne van S-ben. Mivel $k \in A_S$, ezért

$$ukv = 0.$$

Így

$$uxeyv = ukv = 0.$$

Tehát megint

$$(e, f) \notin \mathcal{P}^1_{\{0\}}.$$

Ebből már következik, hogy

$$\mathcal{P}^1_{\{0\}} = \iota_S.$$

Tehát 0 diszjunktív elem. A 11.11. Tétel miatt S szubdirekt irreducibilis. □

11.14. Definíció *Egy olyan S félcsoportot, amelynek magja az S egy részcsoportja, homocsoportnak nevezünk.*

11.15. Tétel *Egy nullelem nélküli szubdirekt irreducibilis homocsoport szükségképpen csoport.*

Bizonyítás. Legyen S egy nullelem nélküli homocsoport. Jelölje G az S magját e pedig a G részcsoport egységelemét. Mivel S nem nullelemes, ezért $|G| \geq 2$. Jelölje φ az S félcsoportnak a G csoportra való következő leképezését: tetszőleges $s \in S$ elem esetén legyen

$$\varphi(s) = es.$$

Mivel G az S félcsoport ideálja, ezért φ az S félcsoportnak a G részcsoportba való leképezése. Mivel

$$eg = g$$

minden $g \in G$ elemre, ezért φ az S félcsoportnak a G részcsoportra való leképezése. Legyenek $s, t \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$\varphi(st) = e(st) = (es)t = ((es)e)t = (es)(et) = \varphi(s)\varphi(t),$$

felhasználva azt is, hogy $es \in G$ és e a G egységeleme. Tehát φ az S félcsoportnak a G részcsoportra való homomorfizmusa. Jelölje α ennek a homomorfizmusnak a magját, azaz

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S : \; ea = eb\}.$$

A 3.3. Lemma szerint α az S félcsoport kongruenciarelációja. Jelölje β a G ideál szerinti Rees-féle kongruenciát. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \cap \beta$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Mivel

$$(a, b) \in \beta,$$

ezért

$$a = b \quad \text{vagy} \quad a, b \in G.$$

Mivel

$$(a, b) \in \alpha,$$

azaz

$$ea = eb,$$

ezért az $a, b \in G$ esetben is

$$a = ea = eb = b$$

adódik. Tehát
$$\alpha \cap \beta = \iota_S.$$
Ha S szubdirekt irreducibilis, akkor $\alpha = \iota_S$, ugyanis a $|G| \geq 2$ feltétel miatt $\beta = \iota_S$ nem lehetséges. Mivel tetszőleges $s \in S$ elem esetén
$$e(es) = es,$$
azaz
$$(s, es) \in \alpha,$$
ezért
$$s = es \in G.$$
Így $S \subseteq G$, azaz $S = G$. □

11.2. Szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoportok

Adott p prímszám esetén jelölje $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ az összes n pozitív egész kitevőre tekintett p^n-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportját. Egy csoportot *kváziciklikus* p*-csoport*nak nevezünk, ha izomorf a $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ csoporttal.

11.16. Tétel *Egy kommutatív csoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha izomorf egy kváziciklikus* p*-csoport (*p *egy prímszám)valamely részcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S egy kommutatív szubdirekt irreducibilis csoport. Akkor S-nek van egy A legszűkebb, nem csak az e egységelemet tartalmazó részcsoportja. Ezért A egy p prímrendű ciklikus csoport. Legyen $e \neq s \in S$ tetszőleges. A része az s elem által generált $[s]$ ciklikus részcsoportnak. Így $[s]$ nem lehet végtelen. Ezért s rendje osztható p-vel, és ezért $[s]$ tartalmaz p-edrendű elemet. Ha $[s]$ rendje $p^\alpha r$, ahol p nem osztja r-et, akkor
$$[s] = [s^{p^\alpha}] \times [s^r].$$
Mivel $A \not\subseteq [s^r]$, ezért $[s^r] = \{e\}$. Így s rendje p valamely pozitív kitevőjű hatványa. Tehát S egy p-csoport. Mivel S szubdirekt felbonthatatlan, ezért direkt felbonthatatlan is. Jól ismert csoportelméleti eredmény, hogy egy direkt felbonthatatlan p-csoport izomorf a kváziciklikus p-csoport egy részcsoportjával. Mivel a fordított állítás nyilvánvaló, ezért a tételt bebizonyítottuk. □

11.17. Tétel *Egy félcsoport akkor és csak akkor globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoport, ha izomorf* G*-vel vagy* G^0*-lal vagy* F*-fel, ahol* G *egy kváziciklikus* p*-csoport (*p *prímszám) valamely legalább kételemű részcsoportjával izomorf,* F *pedig egy kételemű félháló.*

Bizonyítás. Legyen S egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoport. Jelölje K az S szívét. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor S nem tartalmaz nullelemet. Akkor K egyszerű, és így a 7.4. Tétel szerint K egy csoport, azaz S nullelem nélküli homocsoport. A 11.15. Tétel szerint S egy csoport. Ebből pedig a 11.16. Tétel felhasználásával adódik, hogy S izomorf egy kváziciklikus p-csoport (p egy prímszám) valamely legalább kételemű részcsoportjával.

A következőkben tegyük fel, hogy S-nek van egy 0 nulleleme. Megmutatjuk, hogy S-ben a nem-nulla elemek egy részfélcsoportot alkotnak. Tegyük fel, indirekt módon, hogy

$$ab = 0$$

valamely $a, b \in S$ nem nulla elemekre. Világos, hogy

$$A = \{b \in S : \ ab = 0\}$$

az S-nek egy nem-nulla ideálja. Így az S félcsoport K szíve ennek az A ideálnak részhalmaza. Akkor viszont

$$aK = \{0\}.$$

Legyen

$$B = \{a \in S : \ aK = \{0\}\}.$$

Világos, hogy B az S egy nemnulla ideálja, és így

$$K \subseteq B,$$

amiből

$$K^2 = \{0\}$$

következik. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy K globálisan idempotens. Ezért

$$S = G \cup \{0\},$$

ahol G az S félcsoport egy részfélcsoportja. Mivel a feltétel szerint S szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.6. Tétel miatt G szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoport.

Ha G-nek van egy 0^*-gal jelölt nulleleme, akkor

$$\{0, 0^*\}$$

az S félcsoport egy ideálja, amely egyben az S szíve. Tehát S olyan szubdirekt irreducibilis félcsoport, melynek szíve primitív. A 11.11. Tétel miatt az S nulleleme diszjunktív, azaz

$$\mathcal{P}^1_{\{0\}} = \{(a, b) \in S \times S : \ (\forall x, y \in S^1) \ xay = 0 \ \Leftrightarrow \ xby = 0\} = \iota_S.$$

Mivel G részfélcsoport és $S = G \cup \{0\}$, ezért tetszőleges $a \in G$ elem esetén $xay = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$ vagy $y = 0$. Ha a két eset közül bármelyik is teljesül, akkor tetszőleges $b \in G$ elem esetén $xby = 0$. Tehát valamely $x, y \in S^1$ elemekre vagy $xGy \cap \{0\} = \emptyset$ vagy $xGy = \{0\}$. Így tetszőleges $a, b \in G$ esetén

$$(a, b) \in \mathcal{P}^1_{\{0\}},$$

amiből a $\mathcal{P}^1_{\{0\}} = \iota_S$ egyenlőség miatt $a = b$ következik. Tehát $|G| = 1$. Következésképpen S egy kételemű félháló.

Ha G-nek nincs nulleleme, akkor G egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis (kommutatív) félcsoport, s így a bizonyítás előző része miatt G egy legalább kételemű részcsoportja egy kváziciklikus p-csoportnak (p egy prímszám). Az S félcsoport pedig ebből származtatható egy nullelem adjungálásával, azaz $S = G^0$.

Az világos, hogy a tételben szereplő félcsoportok globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoportok. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

11.18. Definíció *Egy nullelemes S félcsoport a elemét annulláló elemnek, ha $aS = Sa = \{0\}$. Egy S félcsoport összes annulláló elemeinek halmazát az S félcsoport annullátorának nevezzük. Ha ez nem csak a nullelemből áll, akkor azt mondjuk, hogy az S annullátora nemtriviális.*

11.19. Tétel *Egy nemtriviális annullátorú kommutatív félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.*

Bizonyítás. A 11.13. Tétel szerint triviális, mert az idézett tétel tetszőleges nemtriviális annullátorú S félcsoportra érvényes. □

11.20. Tétel *Egy legalább kételemű S félcsoport akkor és csak akkor triviális annullátorú, nilpotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoport, ha tartalmaz egy egységelemet, egy nem-nulla diszjunktív elemet, valamint egy nullától különböző nullosztót úgy, hogy a nem-nullosztók halmaza S-nek egy szubdirekt irreducibilis részcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen S olyan legalább kételemű szubdirekt irreducibilis félcsoport, melynek K szíve nilpotens, és az annullátora triviális. A 11.10. Tétel szerint S-nek van legalább két diszjunktív eleme, s ezek mindegyike benne van K-ban. Így í nem-null diszjunktív elem nollosztó. Legyen

$$F = \{f \in S;\ Kf = \{0\}\}.$$

Mivel $K^2 = \{0\}$, ezért

$$K \subseteq F.$$

Az világos, hogy F az S egy ideálja. Mivel S annullátora csak S nullelemét tartalmazza, ezért K nem annullátora S-nek, és így

$$F \neq S.$$

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$G = S - F, \quad K_0 = K - \{0\}, \quad F_0 = F - K.$$

Ekkor

$$\{\{0\}, K_0, F_0, G\}$$

az S félcsoport olyan diszjunkt részhalmazai, melyek úniója S (F_0 lehet üres is). Ha $g \in G$, akkor

$$gK \neq \{0\},$$

azaz

$$gK = K,$$

mert gK ideálja S-nek. Világos, hogy $I = \{s \in S;\ gs = 0\}$ ideálja S-nek. K-t nem tartalmazza I, ezért

$$I = \{0\},$$

azaz g nem nullosztó. Mivel az F elemei nullosztók, ezért G az S nem-nullosztóinak halmaza. Mivel S szíve legalább két elemet tartalmaz, ezért minden $k \in K_0$elemre

$$K = Sk = Gk \cup \{0\}$$

teljesül, azaz van olyan $e \in S$ elem, hogy

$$ek = k.$$

Legyen

$$J = \{s \in S;\ es = s\}.$$

Látható, hogy J az S félcsoport legalább két elemet tartalmazó ideálja. Igy

$$K \subseteq J.$$

Ezért

$$ek = k$$

minden $k \in K$ elemre. Akkor viszont

$$e^n k = k$$

minden pozitív egész n-re és minden $k \in K$ elemre. Legyen

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S;\ e^n a = e^m b \text{ valamely } n, m \text{ pozitív egész számokra}\}.$$

Világos, hogy α az S félcsoport olyan kongruenciája, amelyre $\alpha | K = \iota_K$ teljesül. Akkor

$$\alpha \cap \rho_K = \iota_S,$$

ahol ρ_K jelöli az S félcsoport K szerinti Rees-féle kongruenciáját. Mivel S szubdirekt irreducibilis és $\rho_K \neq \iota_S$, ezért

$$\alpha = id_S.$$

Mivel $(es, s) \in \alpha$ minden $s \in S$ elemre, ezért

$$es = s$$

minden $s \in S$ elemre, azaz e az S félcsoport egységeleme.

Legyenek $g \in G$ és $k \in K_0$ tetszőleges elemek. Akkor

$$Ggk = K_0,$$

és így van olyan $g_1 \in G$ elem, melyre

$$g_1gk = k$$

teljesül. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy g_1g az S félcsoport egységeleme. Így g_1 a g elem inverze. Tehát G az S félcsoport egy részcsoportja.

Tegyük fel, hogy

$$g_1k = g_2k$$

teljesül valamely $g_1, g_2 \in G$ és $k \in K_0$ elemekre. Akkor

$$k = g_1^{-1}g_2k,$$

és így $g_1^{-1}g_2$ az S félcsoport egységeleme, azaz

$$g_1 = g_2.$$

. Mivel $Gk = K_0$, ezért ezen eredményből az következik, hogy a G és K_0 halmazok számossága megegyezik. Legyen η a G csoport valamely H részcsoportja által meghatározott kongruenciája. Vezessük be a következő jelölést:

$$\eta^* = \{(a, b) \in S \times S;\ a \in bH\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy η^* az S félcsoport olyan kongruenciája, melynek G-re való leszűkítése η. Jelölje η_i, $i \in I$ a G egy olyan kongruencia-családját, melyre

$$\cap_{i \in I} \eta_i = id_G$$

teljesül. Jelölje η_i^* $(i \in I)$ az S azon kongruenciáját, melyet η_i segítségével az előző módon definiálunk. Ha $k_1, k_2 \in K_0$, akkor

$$k_1 = gk_2$$

valamely $g \in G$ elemmel. Ezért $(k_1, k_2) \in \eta_i^*$ pontosan azt jelenti, hogy $k_1 \in k_2 H_i$ vagy, hogy van olyan $g_i \in H_i$ elem, melyre $k_1 = k_2 g_i$ teljesül, azaz $k_2 g = k_2 g_i$, azaz (a fentiek miatt) $g = g_i$, ami azza ekvivalens, hogy $g \in H_i$. Igy $(k_1, k_2) \in \cap_{i \in I} \eta_i^*$ akkor és csak akkor, ha $g \in \cap_{i \in I} H_i$ akkor és csak akkor, ha $g = e$, azaz, ha $k_1 = k_2$. Tehát

$$\rho_K \cap (\cap_{i \in I} \eta_i^*) = \iota_S.$$

Mivel S szubdirekt irreducibilis, ezért van olyan $i \in I$ index, hogy

$$\eta_i^* = id_S$$

és így $\eta_i = id_G$. Tehát G egy szubdirekt irreducibilis csoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan egységelemes kommutatív félcsoport, melynek triviális az annullátora, tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet és egy nem-nulla nullosztót, továbbá az is teljesül, hogy a nem nullosztók G halmaza S egy szubdirekt irreducibilis részcsoportja. Megmutatjuk, hogy S szubdirekt irreducibilis félcsoport. Először is megjegyezzük, hogy az S egységeleme benne van G-ben, és így megegyezik a G egységelemével. Legyen k_0 az S egy nem-nulla diszjunktív eleme. A 11.9. Tétel szerint S-nek van K szíve. Ha f egy nullelemtől különböző nullosztó, akkor $ff_1 = 0$ valamely $f_1 \neq 0$ elemmel. Minden $k \in K$-hoz megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$xf_1y = k.$$

Így

$$fk = xff_1y = 0,$$

ami annyit jelent, hogy k annullálja az $F = S - G$ halmazt. Így

$$FK = \{0\}.$$

Ha G-nek csak egy eleme van, akkor $S = F^1$ és F olyan félcsoport, melynek annullátora legalább két elemű, továbbá tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet. A 11.20. Tétel szerint F szubdirekt irreducibilis. A 11.6. Tétel miatt ekkor $S = F^1$ is szubdirekt irreducibilis.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy G-nek egynél több eleme van. Mivel G szubdirekt irreducibilis, ezért van G-nek egy legszűkebb, nem csak az egységelemet tartalmazó H részcsoportja. Jelölje η az S egy tetszőleges nem-identikus kongruenciáját. A tekintett k_0 diszjunktív elemet tartalmazó η-osztály legalább kételemű. Ugyanis, ha egyelemű lenne, akkor S tetszőleges olyan egymástól különböző a és b elemei esetén, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül, az következne, hogy

$$(xay, xby) \in \eta$$

minden $x, y \in S^1$ esetén, amiből pedig az adódna, hogy $xay = k_0$ akkor és csak akkor, ha $xby = k_0$. Ez viszont ellentmond annak, hogy k_0 diszjunktív elem. Így tehát létezik olyan S-beli $s \neq k_0$ elem, amelyre

$$(s, k_0) \in \eta$$

teljesül. Ha $s \notin K$, akkor az s elem által generált SaS ideál (valódi módon) tartalmazza K-t, s ezért

$$xsy = k_0$$

valamely $x, y \in S$ elemekre, amiből

$$(xk_0y, k_0) \in \eta$$

következik. Ha $xy \in G$, akkor

$$s = (xy)^{-1}k_0 \in K,$$

ami ellentmond az $s \notin K$ feltételnek. Így

$$xy \notin G.$$

Mivel $S \setminus G = F$ és $FK = \{0\}$, ezért

$$xk_0y = 0.$$

Így

$$(k_0, 0) \in \eta$$

és

$$(hk_0, 0) \in \eta$$

minden $h \in H$ elemre. Tehát

$$\{(u, v) \in S \times S;\ u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Ha $s \in K_0$, akkor

$$s = g_0k_0$$

valamely $g_0 \in G$ elemre, mert $K = Sk_0 = Gk_0 \cup \{0\}$. Ebben az esetben a G csoport mindazon g elemeinek halmaza, melyekre $(gk_0, k_0) \in \eta$ teljesül a G egy nem-identikus részcsoportját alkotja (ez a részcsoport tartalmazza a $g_0 \neq e$ elemet). Igy H benne van ebben a részcsoportban és ezért

$$\{(u, v) \in S \times S;\ u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Tehát mindkét esetben azt kaptuk, hogy

$$\{(u, v) \in S \times S;\ u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Jelölje η_0 az S összes nem-identikus kongruenciáinak metszetét. Az

$$\{(u,v) \in S \times S;\ u = v \text{ vagy } u,v \in Hk_0\} \subseteq \eta_0$$

és

$$|Hk_0| \geq 2$$

miatt $\eta_0 \neq \iota_S$. Így S szubdirekt irreducibilis. □

Feladatok

11.1. Feladat *(Megoldás: 17.35.) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált félcsoport szubdirekt irreducibilis!*

	e	f	k_1	k_2	0
e	e	e	k_1	k_1	0
f	f	f	k_2	k_2	0
k_1	k_1	k_1	0	0	0
k_2	k_2	k_2	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Mely elemek alkotják a félcsoport szívét?

11.2. Feladat *(Megoldás: 17.36.) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált félcsoport szubdirekt irreducibilis!*

	e	a	u	v	0
e	e	a	0	0	0
a	a	e	0	0	0
u	u	v	0	0	0
v	v	u	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Mely elemek alkotják a félcsoport szívét?

12. fejezet

Permutálható félcsoportok

12.1. Definíció *Egy S félcsoportot permutálható félcsoportnak nevezünk, ha kongruenciái egymással felcserélhetőek, azaz az S félcsoport tetszőleges α és β kongruenciái esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.*

12.2. Tétel *Minden csoport permutálható félcsoport.*

Bizonyítás. Legyenek α és β egy G csoport tetszőleges kongruenciái. Akkor léteznek (egyértelműen) a G csoportnak olyan N, illetve M normális részcsoportjai, amelyek az α, illetve a β kongruenciákat meghatározzák (pl. α esetén $(a, b) \in \alpha$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in N$). Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül valamel $a, b \in G$ elemekre. Akkor van olyan $x \in G$ elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$ax^{-1} \in N \quad \text{és} \quad xb^{-1} \in M.$$

Ebből viszont

$$ab^{-1} \in NM = MN$$

adódik, ami miatt megadhatók olyan $m \in M$ és $n \in N$ elemek, amelyekre

$$ab^{-1} = mn$$

teljesül. Ekkor viszont

$$a(nb)^{-1} = ab^{-1}n^{-1} = m \in M$$

miatt

$$(a, nb) \in \beta.$$

Mivel
$$(nb)b^{-1} = n \in N,$$
ezért
$$(nb, b) \in \alpha.$$
Következésképpen
$$(a, b) \in \beta \circ \alpha.$$
Tehát
$$\alpha \circ \beta \subseteq \beta \circ \alpha.$$
A fordított tartalmazás hasonlóan igazolható. Így
$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha. \qquad \square$$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt:

12.3. Tétel *Egy $\mathcal{M}(G; I, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha $|I| \leq 2$ és $|J| \leq 2$.*

12.1. Permutálható félcsoportok ideáljai

12.4. Tétel *Ha I tetszőleges ideálja, σ pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható S félcsoportnak, akkor I benne van S valamely σ-osztályában vagy pedig σ-osztályok uniója.*

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges ideálja, α pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható S félcsoportnak. Ha I nem része egyetlen α osztálynak sem, illetve nem áll elő α-osztályok uniójaként sem, akkor megadhatók olyan $a, b \in S$ elemek, amelyekre
$$(a, b) \notin \alpha, \quad [a]_\alpha \cap I \neq \emptyset, \quad a \notin I, \quad b \in I$$
teljesül. Akkor tetszőleges
$$x \in [a]_\alpha \cap I$$
elem esetén
$$(a, x) \in \alpha \quad (x, b) \in \varrho_I$$
teljesül, ahol ϱ_I jelöli az S félcsoport I ideálja szerinti Rees-féle kongruenciát. Így
$$(a, b) \in \alpha \circ \varrho_I = \varrho_I \circ \alpha,$$
azaz megadható S-nek olyan y eleme, hogy
$$(a, y) \in \varrho_I \quad (y, b) \in \alpha.$$

Mivel $a \notin I$, ezért

$$y = a,$$

és így

$$(a, b) \in \alpha,$$

ami ellentmondás. Mivel S permutálható, ezért a feltevés hamis volt. Így í tétel igaz. $\square$

12.5. Tétel *Permutálható félcsoport ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

Bizonyítás. Jelölje I és J egy permutálható S félcsoport tetszőleges ideáljait. A 12.4. Tétel szerint I benne van valamelyik ϱ_J-osztályban vagy ϱ_J-osztályok úniója. Mivel

$$I \cap J \neq \emptyset,$$

ezért az első esetben $I \subseteq J$, a második esetben pedig [$J \subseteq I$. $\square$

12.6. Tétel *Nil félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

Bizonyítás. Legyen S nil félcsoport. Ha S permutálható, akkor a 12.5. Tétel szerint az S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

Fordítva, tegyük fel, hogy S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen α az S tetszőleges kongruenciája. Megmutatjuk, hogy ez mindig egy ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Ha α az identikus reláció, akkor α úgy tekinthető, mint az S nulleleme által definiált Rees-féle kongruencia. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\alpha \neq \iota_S$. Legyenek a és b olyan elemek, amelyek nem egyenlők egymással és

$$(a, b) \in \alpha.$$

Tekintsük az általuk generált főideálokat. Mivel a feltétel szerint S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, ezért e két ideál valamelyike tartalmazza a másikat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$a = xby,$$

és így

$$(b, xby) \in \alpha.$$

Ebből viszont

$$(b, x^n b y^n) \in \alpha$$

következik minden n pozitív egész számra. Mivel $a \neq b$, ezért x és y valamelyike eleme S-nek, amiből következik, hogy x vagy y valamelyik hatványa egyenlő nullával. Ebből viszont

$$(b, 0) \in \alpha,$$

és így

$$(a, 0) \in \alpha$$

következik. Azt kaptuk, hogy ha egy α-osztály nem egyelemű, akkor az a 0-át tartalmazó α-osztály. Mivel a 0-val α-relációban álló elemek halmaza S-nek egy I ideálja, α az I ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Mivel S-nek csak Rees-féle kongruenciái vannak, ezért az S kongruenciái láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Ebből mát következik, hogy S permutálható félcsoport. □

12.2. Permutálható félcsoportok epimorf képei

12.7. Tétel *Permutálható félcsoport tetszőleges epimorf képe is permutálható.*

Bizonyítás. Legyen φ egy permutálható S félcsoportnak valamely T félcsoportra való homomorfizmusa. Jelölje σ a φ homomorfizmus magját. A homomorfizmustétel miatt

$$T \cong S/\sigma.$$

Legyenek $\alpha' = \alpha/\sigma$ és $\beta' = \beta/\sigma$ a T félcsoport tetszőleges kongruenciái. Tegyük fel, hogy

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha' \circ \beta'$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor van olyan $x \in S$ elem, hogy

$$([a]_\sigma, [x]_\sigma) \in \alpha' \quad \text{és} \quad ([x]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta'.$$

Ekkor

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha,$$

és ezért van olyan $y \in S$ elem, hogy

$$(a, y) \in \beta \quad \text{és} \quad (y, b) \in \alpha.$$

Ekkor viszont

$$([a]_\sigma, [y]_\sigma) \in \beta' \quad \text{és} \quad ([y]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha',$$

amiből

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta' \circ \alpha'$$

következik. Így
$$\alpha' \circ \beta' \subseteq \beta' \circ \alpha'.$$
Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás. Így
$$\alpha' \circ \beta' = \beta' \circ \alpha'.$$
□

12.8. Tétel *Ha S olyan permutálható félcsoport, amely tartalmaz egy valódi ideált, akkor S-nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. Legyen S olyan permutálható félcsoport, amelyben van egy valódi (azaz az S-től különböző) I ideál. Legyen σ az S olyan kongruenciája, amely szerinti faktorfélcsoport csoport. Jelölje φ az S félcsoportnak az S/σ csoportra való természetes homomorfizmusát. A 12.4. Tétel szerint I benne van valamely σ-osztályban vagy pedig σ-osztályok uniója. Az első esetben az I-t tartalmazó σ-osztály φ szerinti képe az S/σ csoport nulleleme. Ez nem lehetséges, mivel egy legalább kételemű csoportnak nincs nulleleme. A második esetben az I φ-szerinti képe az S/σ csoport egy valódi ideálja, ami szintén ellentmondás, hiszen nemtriviális csoportnak nincs valódi ideálja. □

12.9. Tétel *Legyen I egy S félcsoport ideálja, φ pedig I-nek egy G csoportra való homomorfizmusa. Akkor megadható S-nek G-re olyan ϕ homomorfizmusa, melynek I-re való leszűkítése megegyezik f-fel.*

Bizonyítás. Legyen I egy S félcsoport olyan ideálja, amelynek van egy G csoportra való φ homomorfizmusa. Jelölje σ ennek az epimorfizmusnak a magját. A 2.38. Tétel szerint van I-nek olyan H reflexív unitér részfélcsoportja, hogy $\sigma = P_H$, ahol P_H jelöli az I félcsoport H szerinti, a 2.32. Definícióban értelmezett főkongruenciáját. Legyen α az S félcsoport következő relációja: Tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $(a, b) \in \alpha$ pontosan akkor, ha minden $x, y \in I$ elem esetén az $xay \in H$ tartalmazás akkor és csak akkor teljesül, ha teljesül az $xby \in H$ tartalmazás. Nem nehéz belátni, hogy α az S félcsoport egy kongruenciája és $\alpha|I = P_H$. Mivel tetszőleges $a \in S$ és $h \in H$ elemre $(ha, a) \in \alpha$ és mert $ha \in I$, ezért $S/\alpha \cong G$. Ebből már következik a tétel állítása. □

12.10. Tétel *Ha egy permutálható S félcsoportnak I egy valódi ideálja, akkor sem S-nek, sem I-nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. A 12.8. Tétel és a 12.9. Tétel szerint nyilvánvaló. □

12.11. Tétel *Egy S félháló akkor és csak akkor permutálható, ha $|S| \leq 2$.*

Bizonyítás. Legyen S permutálható félháló. Emlékeztetünk arra, hogy az "$e \leq f$ $(e, f \in S)$ akkor és csak akkor, ha $ef = e$" reláció rendezési reláció S-en. Könnyen ellenőrízhető, hogy tetszőleges $e \in S$ elem esetén $\{x; x \leq e\}$ az S ideálja. A 12.5. Tétel szerint S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így ez a rendezési reláció jólrendezés S-en, azaz S bármely a és b eleme esetén a következők valamelyike teljesül: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 3$. legyenek $a > b > c$ az S tetszőleges elemei. Akkor az

$$X = \{x \in S : \ x \geq a\}, \quad Y = \{y \in S : \ a > y > c\}, \quad Z = \{z \in S : \ c \geq t\}$$

részhalmazok az S egy osztályozását adják. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ehhez tartozó σ ekvivalenciareláció az S félháló egy kongruenciája. Az S/σ félháló egy háromelemű félháló, amely a 12.7. Tétel szerint permutálható. Az viszont könnyen igazolható, hogy a háromelemű félhálók nem permutálhatóak. Tehát $|S| \leq 2$. $\square$

12.12. Tétel *Minden permutálható félcsoport vagy félháló-felbonthatatlan, vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoport félhálójaként.*

Bizonyítás. Legyen S permutálható félcsoport. A 10.7. Következmény szerint S előáll félháló-felbonthatatlan félcsoportok Y félhálójaként. Mivel Y az S félcsoport epimorf képe, ezért Y is permutálható a 12.7. Tétel szerint. A 12.11. Tétel felhasználásával adódik, hogy $|Y| \leq 2$, ami annyit jelent, hogy S vagy félháló-felbonthatatlan (amikor $|Y| = 1$) vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoport félhálójaként (amikor $|Y| = 2$). $\square$

12.13. Tétel *Ha egy permutálható S félcsoport két félháló-felbonthatatlan S_1 és S_0 részfélcsoportjainak félhálója mégpedig úgy, hogy $S_0S_1 \subseteq S_0$, akkor S_1 egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges ideálja S_1-nek. Akkor $I \cup S_0$ ideálja S-nek. Jelölje λ az S félcsoport legszűkebb félhálókongruenciáját; ennek osztályai S_1 és S_0. Mivel az $I \cup S_0$ ideál belemetsz mindkét λ-osztályba, ezért a 12.4. Tétel miatt $I \cup S_0 = S$, és így $I = S_0$. Tehát S_0-nak nincs tőle különböző ideálja, s ezért S_0 egyszerű. $\square$

12.3. Kommutatív permutálható félcsoportok

12.14. Tétel *Egy kommutatív arkhimédeszi félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha izomorf vagy egy csoporttal, vagy egy olyan kommutatív nil félcsoporttal, amelyben az oszthatóság teljes rendezés.*

Bizonyítás. Legyen S egy permutálható kommutatív, arkhimédeszi félcsoport. Ha S egyszerű, akkor a 7.4. Tétel szerint S egy csoport. Ha nem egyszerű, akkor a 12.8. Tétel szerint nincs nemtriviális csoport-epimorf képe. Akkor viszont S tartalmaz egy idempotens elemet a 10.23. Tétel miatt. A 10.22. Tétel szerint S előáll egy kommutatív G

csoportnak egy N kommutatív nil félcsoporttal való ideálbővítéseként. A 12.8. Tétel miatt $|G| = 1$ és így S izomorf N-nel. A 12.6. Tétel miatt S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, s ezért S-ben az oszthatóság teljes rendezés. A 12.2. Tétel és a 12.6. Tétel miatt a tételben felsorolt félcsoportok permutálhatóak. □

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt:

12.15. Tétel *Egy kommutatív nem-arkhimédeszi félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha előáll egy G csoport és egy olyan N nil félcsoport félhálójaként, amely G csoporthatás szerinti orbitjai olyan kommutatív nil félcsoportot alkotnak, melyben az oszthatóság teljes rendezés.*

Feladatok

12.1. Feladat *(Megoldás: 17.37.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félháló nem permutálható.*

12.2. Feladat *(Megoldás: 17.38.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport ideáljai akkor és csak akkor alkotnak láncot a tartalmazásra nézve, ha főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve ([39]).*

13. fejezet

Félcsoportok beágyazása csoportokba

A fejezet első tételében félcsoportoknak csoportokba való beágyazhatóságára adunk szükséges feltételt.

13.1. Tétel *Ha egy S félcsoport beágyazható egy csoportba, akkor S egyszerűsítéses félcsoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoport beágyazható egy G csoportba. Akkor van G-nek olyan T részfélcsoportja, amely az S félcsoporttal izomorf. Elegendő azt megmutatni, hogy T egyszerűsítéses. Legyenek $a, b, x \in T$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$xa = xb.$$

Mivel G csoport, ezért létezik az $x \in T \subseteq G$ elemnek inverze G-ben, azaz létezik olyan

$$x^{-1} \in G$$

elem, hogy

$$x^{-1}x = e,$$

ahol e jelöli a G csoport egységelemét. Így

$$a = ea = (x^{-1}x)a = x^{-1}(xa) = x^{-1}(xb) = (x^{-1}x)b = eb = b.$$

Tehát T bal egyszerűsítéses. Hasonlóan igazolható, hogy T jobb egyszerűsítéses is. $\square$

13.1. Kommutatív félcsoport beágyazása csoportba

Kommutatív félcsoportok esetén az "egyszerűsítéses" fogalom nem csak szükséges, hanem elégséges feltétel is csoportokba való beágyazhatósághoz, azaz igaz a következő tétel:

13.2. Tétel *Egy kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be egy csoportba, ha az S félcsoport egyszerűsítéses.*

Bizonyítás. A 13.1. Tétel miatt elég csak azt megmutatni, hogy minden kommutatív egyszerűsítéses félcsoport beágyazható egy csoportba. Legyen tehát S tetszőleges kommutatív, egyszerűsítéses félcsoport. Az $S \times S$ Descartes-szorzaton definiáljunk egy α relációt a következőképpen:

$$(a, b)\ \alpha\ (c, d) \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad ad = cb.$$

Megmutatjuk, hogy α ekvivalenciareláció. Az világos, hogy α reflexív és szimmetrikus. Tegyük fel, hogy

$$(a, b)\ \alpha\ (c, d) \quad \text{és} \quad (c, d)\ \alpha\ (e, f)$$

valamely $a, b, c, d, e, f \in S$ elemekre. Akkor

$$ad = cb \quad \text{és} \quad cf = ed,$$

amiből

$$(af)c = a(cf) = a(ed) = (ad)e = (cb)e = (eb)c$$

adódik, felhasználva néhányszor, hogy S kommutatív félcsoport. Mivel S egyszerűsítéses, ezért az utóbbi egyenlőségből

$$af = eb$$

következik, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(a, b)\ \alpha\ (e, f).$$

Tehát α ekvivalenciareláció az $S \times S$ halmazon. Megmutatjuk, hogy α az $S \times S$ félcsoport bal-, illetve jobbkongruenciája. Legyenek $a, b, c, d, x, z \in S$ tetszőleges elemek az

$$(a, b)\ \alpha\ (c, d)$$

feltétellel. Akkor

$$ad = cb,$$

amiből

$$xazd = xczb$$

következik. Ezen utóbbi egyenlőség ekvivalens az

$$(x, z)(a, b) = (xa, zb)\ \alpha\ (xc, zd) = (x, z)(c, d)$$

feltétellel. Tehát α balkongruencia. Hasonlóan igazolható, hogy α jobbkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt α az $S \times S$ direkt szorzat egy kongruenciája. Az S félcsoport kommutativitása miatt

$$(a, a)\ \alpha\ (b, b)$$

tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén. Továbbá, ha

$$(a, b)\ \alpha\ (c, c)$$

valamely $a, b, c \in S$ elemekre teljesül, akkor

$$ac = cb,$$

amiből S kommutativitása és egyszerűsítésessége miatt

$$a = b$$

adódik. Tehát az $S \times S$ direkt szorzat összes (a, a) alakú elemeinek E halmaza egy α-osztály. Mivel tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén

$$(a, a)(b, c) = (ab, ac)\ \alpha\ (b, c),$$

valamint

$$(b, c)(a, a) = (ba, ca)\ \alpha\ (b, c),$$

ezért az E osztály az $(S \times S)/\alpha$ faktorfélcsoport egységeleme. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $(a, b)(b, a)$ és $(b, a)(a, b)$ szorzatok benne van az E osztályban, ezért a (b, a) elemet tartalmazó α-osztály az (a, b) elemet tartalmazó α-osztály inverze. Tehát az $(S \times S)/\alpha$ faktorfélcsoport csoport.

Tekintsük az S félcsoportnak az $(S \times S)/\alpha$ faktorcsoportba való azon ϕ leképezését, amely az S félcsoport a eleméhez az (a^2, a) osztályát rendeli. Ha

$$\phi(a) = \phi(b),$$

akkor

$$(a^2, a)\ \alpha\ (b^2, b),$$

amiből

$$a^2 b = b^2 a,$$

azaz

$$a = b$$

következik. Tehát ϕ injektív. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $\phi(ab)$ az $((ab)^2, ab)$ elemet tartalmazó osztály, $\phi(a)\phi(b)$ pedig (a^2, a) és a (b^2, b) elemeket tartalmazó osztályok szorzata; ezen utóbbi osztályok szorzata az $((ab)^2, ab)$ elemet tartalmazó osztály, felhasználva, hogy $a^2 b^2 = (ab)^2$. Így $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Tehát ϕ homomorfizmus. Következésképpen ϕ az S félcsoportnak az $(S \times S)/\alpha$ csoportba való beágyazása. $\square$

13.2. Egy elégséges feltétel

13.3. Definíció *Egy S félcsoportot jobb reverzibilis félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $Sa \cap Sb \neq \emptyset$.*

13.4. Tétel *Minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoportot be lehet ágyazni egy csoportba.*

Bizonyítás. Legyen S egy jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport. Jelölje $\mathcal{I}_S$ az S összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak félcsoportját, azaz az S szimmetrikus inverz félcsoportját (6.25. Definíció). Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{I}_S$ elem esetén jelölje $D(\alpha)$ és $R(\alpha)$ az α leképezés értelmezési tartományát, illetve értékkészletét (azaz a képhalmazát).

Tetszőleges $a \in S$ elem esetén tekintsük az S félcsoport a eleméhez tartozó ϱ_a belső jobb transzlációját; $D(\varrho_a) = S$, $R(\varrho_a) = Sa$, és tetszőleges $x \in S$ elemre $(x)\varrho_a = xa$. Mivel S bal egyszerűsítéses, ezért $\varrho_a \in \mathcal{I}_S$. Ugyanezen ok miatt S bal reduktív, és ezért az 5.11. Lemma szerint $\phi\ :\ a \mapsto \varrho_a$ $(a \in S)$ az S félcsoportnak az $\mathcal{I}_S$ félcsoportba való izomorfizmusa. Egy ϱ_a leképezés $(a \in S)$ inverze az a $\varrho_a^{-1} \in \mathcal{I}_S$ parciális transzformáció, melyre $D(\varrho_a^{-1}) = Sa$, $R(\varrho_a^{-1}) = S$, és tetszőleges $x \in S$ elem esetén $(xa)\varrho_a^{-1} = x$.

Jelölje H a $\mathcal{I}_S$ félcsoport $(S)\phi = \{\varrho_a\ :\ a \in S\}$ részfélcsoportja által generált inverz részfélcsoportját. Ennek az inverz félcsoportnak minden eleme véges sok ϱ_a, illetve ϱ_b^{-1} $(a, b \in S)$ alakú leképezés szorzata. Mivel mindkét típusú leképezés értelmezési tartománya és értékkészlete az S félcsoport egy-egy bal oldali ideálja, ezért az S félcsoportra vonatkozó jobb reverzibilitás miatt szorzatuk nem lehet az üres leképezés, s ezért H nem tartalmazza az üres leképezést, azaz az $\mathcal{I}_S$ nullelemét.

Vezessük be a következő jelölést: tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_S$ leképezések esetén jelentse

$$\alpha \subseteq \beta$$

azt a feltételt, hogy

$$D(\alpha) \subseteq D(\beta)$$

$$(x)\alpha = (x)\beta \quad (\forall x \in D(\alpha)).$$

A H halmazon definiálunk egy $\sim$ relációt a következőképpen:

$$\alpha \sim \beta,\ (\alpha, \beta \in H) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \gamma \in H) \quad \gamma \subseteq \alpha,\ \gamma \subseteq \beta.$$

Megmutatjuk, hogy $\sim$ kongruenciareláció a H félcsoporton. Az világos, hogy $\sim$ reflexív és szimmetrikus. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \beta \ \sim \gamma$$

teljesül valamely $\alpha, \beta, \gamma \in H$ leképezésekre. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan $\delta_1, \delta_2 \in H$ leképezések, hogy

$$\delta_1 \subseteq \alpha,\ \delta_1 \subseteq \beta,\ \delta_2 \subseteq \beta,\ \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Ekkor

$$D(\delta_1) \subseteq D(\alpha) \cap D(\beta),\ D(\delta_2) \subseteq D(\beta) \cap D(\gamma).$$

Legyen

$$\delta = \delta_2 \delta_2^{-1} \delta_1.$$

Akkor

$$D(\delta) \subseteq D(\delta_2).$$

Ezért, ha

$$x \in D(\delta),$$

akkor

$$(x)\delta = (((x)\delta_2)\delta_2^{-1})\delta_1 = (x)\delta_1 = (x)\beta = (x)\delta_2.$$

Így

$$\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \alpha \text{ és } \delta \subseteq \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Tehát

$$\alpha \sim \gamma.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy $\sim$ a H félcsoport kongruenciarelációja. Tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \alpha'\ \beta \sim \beta'$$

valamely $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in H$ elemekre. Akkor vannak olyan H-beli γ és δ elemek, amelyekre

$$\gamma \subseteq \alpha, \gamma \subseteq \alpha', \delta \subseteq \beta, \delta \subseteq \beta'$$

teljesül. Ebből

$$\gamma\delta \subseteq \alpha\beta \text{ és } \gamma\delta \subseteq \alpha'\beta'$$

következik. Így

$$\alpha\beta \sim \alpha'\beta'.$$

Tehát $\sim$ a H félcsoport egy kongruenciája.

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy a

$$G = H/\sim$$

faktorfélcsoport csoport. Ehhez elegendő megmutatni, hogy adott $\alpha, \beta \in H$ elemekhez léteznek olyan $\xi, \eta \in H$ elemek, hogy $\alpha\xi \sim \eta\alpha \sim \beta$ teljesül. Világos, hogy

$$\xi = \alpha^{-1}\beta \text{ és } \eta = \beta\alpha^{-1}$$

alkalmas elemek, hiszen

$$\alpha\alpha^{-1}\beta \subseteq \beta \text{ és } \beta\alpha\alpha^{-1} \subseteq \beta.$$

Mivel H nem tartalmazza az üres leképezést, ezért a G csoport nem egyelemű.

Jelölje $(\cdot)\psi$ a H félcsoportnak a G csoportra való természetes homomorfizmusát. Megmutatjuk, hogy ψ-nek $(S)\phi$-re való leszűkítése injektív. Tegyük fel tehát, hogy

$$(\varrho_a)\psi = (\varrho_b)\psi$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor $\varrho_a \sim \varrho_b$, és így van olyan $\gamma \in H$ elem, hogy

$$\gamma \subseteq \varrho_a \; \gamma \subseteq \varrho_b.$$

Mivel H nem tartalmazza az üres leképezést, ezért $D(\gamma) \neq \emptyset$. Legyen

$$x \in D(\gamma)$$

tetszőleges elem. Akkor

$$xa = xb,$$

amiből

$$a = b$$

és így $\varrho_a = \varrho_b$ következik.

Mivel ϕ izomorf módon képezi le S-et $(S)\phi$-re, ezért a ψ-re éppen most bizonyítottak miatt $(\cdot)(\phi \circ \psi)$ az S félcsoportnak a G csoportba való beágyazása. □

13.3. Egyszerűsítéses félcsoport hányadoscsoportja

13.5. Definíció *Egy G csoportról azt mondjuk, hogy egy egyszerűsítéses S félcsoport bal hányadoscsoportja, ha G részfélcsoportként tartalmaz S-et, és G minden g eleme felírható $g = a^{-1}b$ alakban valamely $a, b \in S$ elemekkel.*

13.6. Tétel *Egy egyszerűsítéses S félcsoportnak akkor és csak akkor van bal hányadoscsoportja, ha S jobb reverzibilis.*

Bizonyítás. Legyen S olyan egyszerűsítéses félcsoport, melynek van G bal hányadoscsoportja. Akkor G minden eleme felírható $a^{-1}b$ alakban valamely $a, b \in \varphi(S)$ elemekkel. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Akkor vannak olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$ab^{-1} = x^{-1}y.$$

Ebből

$$xa = yb$$

adódik, s ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát S jobb reverzibilis félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy S jobb egyszerűsítéses és jobb reverzibilis félcsoport. A 13.4. Tétel szerint feltehetjük, hogy van olyan G csoport, amelynek S részfélcsoportja. Legyen

$$G' = \{a^{-1}b : \ a, b \in S'\}.$$

Megmutatjuk, hogy G' a G csoport egy részcsoportja, amiből már következik, hogy G' az S félcsoport bal hányadoscsoportja. Ha

$$a^{-1}b \in G',$$

akkor

$$(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in G'.$$

Tehát G' zárt az inverzképzésre nézve. Legyenek

$$a^{-1}b, c^{-1}d \in G'$$

tetszőleges elemek. Mivel S' jobb reverzibilis, ezért vannak olyan $x, y \in S'$ elemek, amelyekre

$$xb = yc$$

teljesül. Akkor viszont G-ben

$$bc^{-1} = x^{-1}y,$$

és így

$$a^{-1}bc^{-1}d = a^{-1}x^{-1}yd = (xa)^{-1}(yd) \in G'.$$

Tehát G' zárt a G-beli műveletre nézve. Tehát G' a G egy részcsoportja. $\square$

13.7. Tétel *Jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport bármely két $(G_1; \cdot)$ és $(G_2; \circ)$ bal hányadoscsoportjai esetén létezik G_1-nek G_2-re olyan izomorfizmusa, amely S elemeit fixen hagyja.*

Bizonyítás. Legyenek $(G_1; \cdot)$ és $(G_2; \circ)$ egy egyszerűsítéses, jobb reverzibilis S félcsoport bal hányadoscsoportjai. Legyen

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = a^{-1} \circ b.$$

Megmutatjuk, hogy ϕ a G_1-nek G_2-re való izomorfizmusa. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ϕ injektív. Tegyük fel, hogy

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = \phi(c^{-1} \cdot d)$$

valamely $a, b, c, d \in S$ elemekre. Akkor

$$a^{-1} \circ b = c^{-1} \circ d,$$

amiből

$$b = a \circ c^{-1} \circ d$$

adódik. Mivel S jobb reverzibilis, ezért vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$xa = yc$$

és így

$$a \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

és ezért

$$b = x^{-1} \circ y \circ d.$$

Ebből pedig

$$b \circ d^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

azaz

$$xb = yd$$

adódik. Ez viszont G_1-ben a

$$b \cdot d^{-1} = x^{-1} \cdot y,$$

azaz a

$$b = x^{-1} \cdot y \cdot d$$

egyenlőséget eredményezi. A fenti $xa = yc$ egyenlőségből

$$x^{-1} \cdot y = a \cdot c^{-1}$$

adódik, s ezért

$$b = a \cdot c^{-1} \cdot d.$$

Így

$$a^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot d.$$

Tehát ϕ injektív.

Legyenek

$$a^{-1} \cdot b, c^{-1} \cdot d \in G_1$$

tetszőleges elemek. Mivel S jobb reverzibilis, ezért olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$xb = yc,$$

és így

$$b \cdot c^{-1} = x^{-1} \cdot y \text{ és } b \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y.$$

Ennek alapján

$$(a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d) = (xa)^{-1} \cdot (yd) \text{ és } (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = (xa)^{-1} \circ (yd).$$

Tehát

$$\phi((a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d)) = \phi((xa)^{-1} \cdot (yd)) = (xa)^{-1} \circ (yd),$$

és

$$\phi(a^{-1} \cdot b) \circ \phi(c^{-1} \cdot d) = (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = a^{-1} \circ (b \circ c^{-1}) \circ d) =$$
$$a^{-1} \circ (x^{-1} \circ y) \circ d) = (xa)^{-1} \circ (yd).$$

Tehát ϕ homomorfizmus. Következésképpen ϕ a G_1 csoportnak a G_2 csoportra való izomorf leképezése. Az világos, hogy ϕ az S elemeit fixen hagyja. □

Feladatok

13.1. Feladat *(Megoldás: 17.39.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be csoportba, ha egyszerűsítéses.*

13.2. Feladat *(Megoldás: 17.40.) Mutassuk meg, hogy ha egy S félcsoport beágyazható egy periodikus csoportba, akkor S is periodikus csoport!*

14. fejezet

Félcsoportok beágyazása csoportok uniójába

14.1. Definíció *Egy S félcsoportról azt mondjuk, hogy bal [jobb] szeparatív , ha az $ab = a^2$ és $ba = b^2$ [$ab = b^2$ és $ba = a^2$] feltételekből $a = b$ következik minden $a, b \in S$ elemre. Egy olyan félcsoportot, amely bal szepartív és egyben jobb szeparatív is, szeparatív félcsoportnak nevezünk. Egy S félcsoportot gyengén szeparatív félcsoportnak nevezünk, ha $a^2 = ab = b^2$ az $a = b$ teljesülését eredményezi tetszőleges $a, b \in S$ elemekre.*

Világos, hogy minden bal [jobb, gyengén] egyszerűsítéses félcsoport bal [jobb, gyengén] szeparatív. A gyengén szeparatív félcsoportok fontosságára utal a következő tétel.

14.2. Tétel *Ha egy S félcsoport beágyazható egy olyan félcsoportba, amely csoportok uniója, akkor S gyengén szeparatív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoportot be lehet ágyazni egy H félcsoportba, amely részcsoportjainak uniója. Azonosítsuk S-et H azon részfélcsoportjával, amellyel az S izomorf. A 1.42. Tétel szerint H diszjunkt részcsoportok uniója. Legyenek $a, b \in S \subseteq H$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a^2 = ab = b^2.$$

Ekkor a és b a H félcsoport ugyanazon részcsoportjának elemei. Beszorozva balról a fenti egyenlőség bal oldali részét az a elem szóban forgó részcsoportbeli inverzével, azt kapjuk, hogy

$$a = b.$$

Tehát S gyengén szeparatív. □

A következő részben megmutatjuk, hogy kommutatív félcsoportok esetén a csoportok uniójaként előálló félcsoportba való beágyazhatóságnak nem csak szükséges, hanem elégsége feltétele is a gyengén szeparativitás. Ehhez viszont néhány előkészítő eredményre van szükségünk. Ezért alőször ezeket tárgyaljuk.

A 10.18. Következmény szerint minden kommutatív félcsoport előáll kommutatív arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként. A következőkben a gyengén szeparatív kommutatív félcsoportokat fogjuk jellemzi az ezen félháló-felbontásban szereplő arkhimédeszi komponensek segítségével. Mindenekelőtt bebizonyítunk egy tételt, amely megmutatja, hogyan konstruálhatjuk meg a kommutatív félcsoportok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciáját.

14.1. Kommutatív félcsoportok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája

14.3. Tétel *Tetszőleges kommutatív S félcsoport esetén*

$$\sigma = \{(a,b) \in S \times S : \ (\exists n, m \in N^+) \ ab^m = b^{m+1}, \ ba^n = a^{n+1}\}$$

az S félcsoport legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. Az világos, hogy σ reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy σ tranzitív is. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy ha

$$ab^m = b^{m+1}, \ ba^n = a^{n+1}$$

teljesül valamely $a, b \in S$ elemre és m, n pozitív egészre, akkor mindig van olyan t pozitív egész szám (pl. $t = max\{m, n\}$), hogy

$$ab^t = b^{t+1}, \ ba^t = a^{t+1}.$$

Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek az

$$a \ \sigma \ b, \ b \text{ és } \sigma \ c$$

feltétellel. Akkor léteznek olyan n és m pozitív egész számok, melyekre

$$ab^n = b^{n+1}, \ ba^n = a^{n+1}$$

és

$$ab^m = b^{m+1}, \ ba^m = a^{m+1}.$$

Legyen

$$k = (n+1)(m+1) - 1 = n(m+1) + m.$$

Akkor
$$ac^k = ac^{n(m+1)}c^m = a(bc^m)^n c^m = ab^n c^{m(n+1)} =$$
$$= b^{n+1}c^{m(n+1)} = (b^m)^{n+1} = c^{(m+1)(n+1)} = c^{k+1}.$$
Hasonlóan igazolható, hogy
$$ca^k = a^{k+1}.$$
Így
$$a \ \sigma \ c.$$

A következő lépésként megmutatjuk, hogy σ az S félcsoport egy kongruenciája. A 2.22. Tétel szerint elegendő azt megmutatni, hogy σ jobb-, illetve balkongruencia. Itt a jobb oldali esetet részletezzük; a bal oldali eset ennek duálisa. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy
$$a \ \sigma \ b.$$
Akkor
$$ab^n = b^{n+1}, \ ba^n = a^{n+1}$$
valamely n pozitív egész számra. Akkor
$$(ac)(bc)^n = ab^n c^{n+1} = b^{n+1}c^{n+1} = (bc)^{n+1}.$$
Hasonlóan igazolható, hogy
$$(bc)(ac)^n = (ac)^{n+1}.$$
Következésképpen
$$ac \ \sigma \ bc.$$
Tehát σ az S félcsoport egy jobbkongruenciája. A fenti megjegyzés figyelembevételével, σ az S félcsoport egy kongruenciája.

Megmutatjuk, hogy σ gyengén szeparatív kongruencia. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy
$$a^2 \ \sigma \ ab \ \sigma \ b^2.$$
Ekkor léteznek olyan m és n pozitív egész számok, melyekre
$$(ab)(a^2)^m = (a^2)^{m+1} \text{ és } (ab)(b^2)^n = (b^2)^{n+1}.$$
Akkor viszont
$$ba^{2m+1} = a^{2m+2} \text{ és } ab^{2n+1} = b^{2n+2}.$$
Így
$$a \ \sigma \ b.$$
Tehát σ az S félcsoport egy gyengén szeparatív kongruenciája.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy σ az S legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája. Ehhez tekintsük S egy tetszőleges gyengén szeparatív ϱ kongruenciáját. Tegyük fel, hogy

$$a \;\sigma\; b$$

teljesül az S valamely a és b elemeire. Meg fogjuk mutatni, hogy $a \;\varrho\; b$. Az a és b elemekre tett feltétel szerint megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$ab^n = b^{n+1},\; ba^n = a^{n+1}.$$

Ekkor persze

$$ab^n \;\varrho\; b^{n+1} \text{ és } ba^n \;\varrho\; a^{n+1}.$$

Ha $n = 1$, akkor

$$a^2 \;\varrho\; ab \;\varrho\; b^2,$$

amiből a ϱ kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsába miatt

$$a \;\varrho\; b$$

következik. Tehát feltehetjük, hogy $n \geq 2$. Akkor ($n = 2$ esetén az $ab^{n-2} = ab^0$ szorzatot a-nak tekintve)

$$(ab^{n-1})^2 = (ab^{n-2})(ab^n) \;\varrho\; (ab^{n-2})b^{n+1} = (ab^{n-1}b^n =$$

$$= (ab^n)b^{n_1} \;\varrho\; b^{n+1}b^{n-1} = (b^n)^2.$$

Ezekből az egyenlőségekből, az $x = ab^{n-1}$ és $y = b^n$ jelöléseket bevezetve, a következő adódik:

$$x^2 \;\varrho\; xy \;\varrho\; y^2.$$

Mivel ϱ gyengén szeparatív kongruencia, ezért

$$a \;\varrho\; b,$$

azaz

$$ab^{n-1} \;\varrho\; b^n.$$

hasonlóan igazolható, hogy

$$ba^{n-1} \;\varrho\; a^n.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az

$$ab^n \;\varrho\; b^{n+1} \text{ és } ba^n \;\varrho\; a^{n+1}$$

feltételből következik az

$$ab^{n-1} \;\varrho\; b^n \text{ és } ba^{n-1} \;\varrho\; a^n$$

eredmény. A gondolatmenetet tovább folytatva, végül is azt kapjuk, hogy

$$a^2 \varrho ab \varrho b^2,$$

amiből a ϱ kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsába miatt

$$a \varrho b$$

következik. Tehát

$$\sigma \subseteq \varrho,$$

azaz σ az S félcsoport legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája. □

14.4. Következmény *Ha a és b egy kommutatív gyengén szeparatív S két olyan eleme, amelyekre $ab^m = b^{m+1}$ és $ba^n = a^{n+1}$ teljesül valamely m és n pozitív egész számokkal, akkor $a = b$.*

Bizonyítás. Mivel egy kommutatív gyengén szeparatív S félcsoport esetén az ι_S identikus reláció szeparatív, ezért $\sigma \subseteq \iota_S$ az előző tétel miatt. Ebből már következik az állítás. □

14.2. Kommutatív gyengén szeparatív félcsoportok

14.5. Tétel *Egy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor gyengén szeparatív, ha arkhimédeszi komponensei egyszerűsítésesek.*

Bizonyítás. Legyenek S_i $(i \in I)$ egy kommutatív S félcsoport arkhimédeszi komponensei.

Tegyük fel, hogy S gyengén szeparatív. Akkor az S_i $(i \in I)$ félcsoportok mindegyike gyengén szeparatív. Legyenek $a, b, x \in S_i$ $(i \in I)$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ax = bx.$$

Mivel S_i arkhimédeszi félcsoport, ezért léteznek olyan $u, v \in S$ elemek, hogy

$$xu = a^m \text{ és } xv = b^n$$

teljesül valamely m és n pozitív egész számokra. Akkor

$$a^{m+1} = axu = bxu = ba^m$$

és

$$b^{n+1} = bxv = axv = ab^n.$$

A 14.3. Tétel szerint

$$a \sigma b.$$

Mivel S_i gyengén szeparatív, ezért a 14.4. Következmény szerint $a = b$. Tehát S_i egyszerűsítéses félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy az S_i $(i \in I)$ arkhimédeszi komponensek egyszerűsítésesek. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az

$$a^2 = ab = b^2$$

feltétellel. Ha $a \in S_i$ és $b \in S_j$, akkor $a^2 = b^2$ és $a^2 \in S_i$, valamint $b^2 \in S_j$ miatt $i = j$ és $a, b \in S_i$. Mivel S_i egyszerűsítéses, ezért az $a^2 = ab = b^2$ feltételből $a = b$ következik. Tehát S gyengén szeparatív. □

Ezek után rátérhetünk a fejezet fő tételére:

14.6. Tétel *Egy kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be olyan félcsoportba, amely részcsoportjainak uniója, ha gyengén szeparatív.*

Bizonyítás. Ha egy S kommutatív félcsoport beágyazható egy olyan félcsoportba, amely részcsoportjainak uniója, akkor a a 14.2. Tétel szerint S gyengén szeparatív.

Fordítva, legyen S olyan kommutatív félcsoport, amely gyengén szeparatív. A 10.18. Következmény szerint S előáll S_i $(i \in I)$ arkhimédeszi félcsoportok Y félhálójaként. A 14.5. Tétel szerint minden egyes S_i félcsoport egyszerűsítéses. Mivel az S_i félcsoportok kommutatívak, ezért a bal oldali ideáljaik mindegyike kétoldali ideál. Mivel egy félcsoportban tetszőleges két ideál metszete soha nem üres, ezért az S_i félcsoportok jobb reverzibilisek. Így a 13.6. Tétel szerint minden egyes S_i félcsoportnak van G_i hányados csoportja (G_i minden eleme kifejezhető ab^{-1} alakban valamely $a, b \in S_i$ elem segítségével; $ab^{-1} = cd^{-1}$ akkor és csak akkor, ha $ad = bc$). Mivel az S_i félcsoportok páronként diszjunktak, feltehetjük, hogy a G_i csoportok is ilyenek. Legyen

$$T = \cup_{i \in I} G_i.$$

A T halmazon definiálunk egy $\circ$ műveletet a következőképpen: Legyenek $a \in G_i$ és $b \in G_j$ $(i, j \in I)$ tetszőleges T-beli elemek. Akkor

$$a = a_1 a_2^{-1} \text{ és } b = b_1 b_2^{-1}$$

valamely $a_1, a_2 \in S_i$ és $b_1, b_2 \in S_j$ elemekkel. Legyen

$$a \circ b = (a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1}.$$

Az világos, hogy $a \circ b \in G_{ij}$. Megmutatjuk, hogy ha $a = a_3 a_4^{-1}$ és $b = b_3 b_4^{-1}$, akkor $(a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1} = (a_3 b_3)(a_4 b_4)^{-1}$, és így az $a \circ b$ szorzat független az a, illetve b elem S_i, illetve S_j eleminek segítségével való előállítástól. Valóban, ha a-ra és b-re az

$$a = a_3 a_4^{-1} \text{ és } b = b_3 b_4^{-1}$$

előállítás is érvényes, akkor

$$a_1a_4 = a_2a_3 \text{ és } b_1b_4 = b_3b_3,$$

ezért

$$(a_1b_1)(a_4b_4) = (a_2b_2)(a_3b_3)$$

teljesül S_{ij}-ben. Ekkor viszont

$$(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1} = (a_3b_3)(a_4b_4)^{-1}$$

valóban teljesül G_{ij}-ben.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $\circ$ művelet asszociatív. Legyenek

$$a = a_1a_2^{-1} \in G_i,\ \ b = b_1b_2^{-1} \in G_j,\ \ c = c_1c_2^{-1} \in G_k$$

tetszőleges elemek ($i, j, k \in I$). Akkor

$$(a \circ b) \circ c = ((a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}) \circ (c_1c_2^{-1}) = ((a_1b_1)c_1)((a_2b_2)c_2)^{-1} =$$

$$= (a_1(b_1c_1))(a_2(b_2c_2))^{-1} = (a_1a_2^{-1}) \circ ((b_1c_1)(b_2c_2)^{-1}) = a \circ (b \circ c).$$

Így T olyan félcsoport, amely a G_i ($i \in I$) csoportok uniója, és az is igaz, hogy T részhalmazként tartalmazza S-et. Már csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $a \circ b$ megegyezik az a és b elemek S félcsoportbeli ab szorzatával. Legyenek tehát $a \in S_i$ és $b \in S_j$ ($i, j \in I$) tetszőleges elemek. Mivel

$$a = a^2a^{-1} \text{ és } b = b^2b^{-1},$$

ezért G_{ij}-ben

$$a \circ b = (a^2b^2)(ab)^{-1} = (ab)^2(ab)^{-1} = ab. \qquad \square$$

Feladatok

14.1. Feladat *(Megoldás: 17.41.) Mutassuk meg, hogy minden gyengén szeparatív félcsoport gyengén reduktív!*

14.2. Feladat *(Megoldás: 17.42.) Egy S félcsoportot gyengén egyszerűsítésesnek nevezünk, ha tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén az $ac = bc$ és $ca = cb$ feltételek együttes teljesüléséből $a = b$ következik. Mutassuk meg, hogy ha egy gyengén kommutatív S félcsoport arkhimédeszi komponensei gyengén egyszerűsítésesek, akkor S gyengén szeparatív!*

15. fejezet

Félcsoportalgebrák

A fejezet első három szakaszában összefoglaljuk a test feletti asszociatív algebrákkal kapcsolatos azon legfontosabb fogalmakat, illetve eredményeket, amelyek a negyedik szakaszban felhasználásra kerülnek a félcsoportalgebrák vizsgálata során.

15.1. Véges dimenziós algebrák kitüntetett elemei

15.1. Definíció *Egy $\mathbb{F}$ test feletti algebrán olyan $\mathcal{A} = (A; +, \cdot)$ gyűrűt értünk, amely esetén $(A; +)$ vektortér $\mathbb{F}$ felett és tetszőleges $a, b \in A$ és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{F}$ esetén*

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$$

teljesül. Az algebra dimenzióján az algebrának, mint $\mathbb{F}$ feletti vektortérnek a dimenzióját értjük.

Ebben a jegyzetben mindvégig véges dimenziós algebrákkal fogunk foglalkozni.

15.2. Definíció *Egy $\mathcal{A}$ algebra részalgebráján $\mathcal{A}$-nak olyan részhalmazát értjük, amely $\mathcal{A}$-nak, mint vektortérnek altere, s egyben részgyűrűje $\mathcal{A}$-nak, mint gyűrűnek.*

Mivel egy vektortér tetszőleges $B \supset C$ alterei esetén $dimB > dimC$, ezért ha egy $\mathcal{A}$ algebra dimenziója $n \in N^+$, akkor $\mathcal{A}$ részalgebráinak nincs $n+1$-nél hosszabb szigorúan csökkenő lánca.

15.3. Definíció *Egy $\mathcal{A}$ algebra ideálján $\mathcal{A}$-nak olyan részalgebráját értjük, amely ideálja $\mathcal{A}$-nak, mint gyűrűnek.*

15.4. Definíció *Egy $\mathcal{A}$ algebra a elemét nilpotens elemnek nevezzük, ha megadható olyan n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 0$ teljesül. Az $a \in \mathcal{A}$ elemet valódi nilpotens elemnek nevezzük, ha minden $x \in \mathcal{A}$ elem esetén xa nilpotens elem (ekkor ax is nilpotens, mert $(xa)^n = 0$-ból $(ax)^{n+1} = a(xa)^n x = 0$ következik).*

15.5. Definíció *Egy algebra a elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $a^2 = a$.*

15.6. Tétel *Minden olyan véges dimenziós algebrában, amely tartalmaz legalább egy nem nilpotens elemet, van legalább egy nullától különböző idempotens elem.*

Bizonyítás. Legyen a egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra nem nilpotens eleme. Legyen $n \geq 1$ az $\mathcal{A}$ dimenziója. Akkor az $a, a^2, \ldots, a^{n+1}$ elemrendszer lineárisan függő $\mathbb{F}$ felett, azaz megadhatók olyan $\mathbb{F}$-beli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ elemek, amelyek között van legalább egy elem, amely nem az $\mathbb{F}$ nulleleme, továbbá teljesül az

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\alpha_1 \neq 0$. Akkor a fenti egyenlőség

$$\alpha_1 a + ca = 0$$

alakban írható, ahol

$$c = \alpha_2 a + \cdots + \alpha_{n+1} a^n.$$

Mivel $a \neq 0$ és $\alpha_1 \neq 0$, ezért

$$c \neq 0.$$

A fenti $\alpha_1 a + ca = 0$ egyenlőségből

$$a = (-\frac{c}{\alpha_1})a$$

adódik. Ezen utóbbi egyenlőségből

$$a^k = (-\frac{c}{\alpha_1})a^k$$

következik minden k pozitív egész számra. Így

$$(-\frac{c}{\alpha_1})^2 = -\frac{1}{\alpha_1}(-\frac{c}{\alpha_1})(\alpha_2 a + \cdots + \alpha_{n+1} a^n) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 a + \cdots + \alpha_{n+1} a^n) = -\frac{c}{\alpha_1},$$

azaz $-c/\alpha_1$ az $\mathcal{A}$ algebra nullelemtől különböző idempotens eleme.

A következőkben vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\alpha_1 = 0$. Jelölje m_0 azt a legkisebb indexet, amelyre $\alpha_{m_0} \neq 0$, továbbá jelölje $m_0 + h \leq n + 1$ azt a legnagyobbat azon $j \leq n + 1$ index közül, amelyre $\alpha_j \neq 0$. Tehát a fenti

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség tényleges alakja

$$\alpha_{m_0}a^{m_0}+\cdots+\alpha_{m_0+h}a^{m_0+h}=0,$$

amely legfeljebb $h+1$ nem nulla tagot tartalmaz. Szorozzuk be ezt az egyenlőséget rendre a-val, a^2-tel, és így tovább, $a^{(m_0-1)h}$-val. Így, az eredeti mellett, $(m_0-1)h$ új egyenlőség is teljesül. Ezen új és a kiinduló egyenletekben az a elem legkisebb hatványa m_0, a legnagyobb hatványa pedig $m_0+h+(m_0-1)h=m_0(h+1)$. Jelöljük az a^{m_0} hatványt b-vel. Akkor a vizsgált egyenletekben b legkisebb hatványa 1 (ez a kiinduló egyenlet első tagja), legnagyobb hatványa pedig $h+1$ (ez az új egyenletek közül az utolsó egyenlet utolsó tagja). Az egyenletekben az a elemnek legfeljebb m_0h+1 számú különböző hatványa szerepel; ezek közül legfeljebb $h+1$ olyan van, ahol a kitevő az m_0 pozitív egész számszorosa (ezek a b elem különböző pozitív egész kitevős hatványai), és legfeljebb $(m_0-1)h$ olyan, ahol a kitevő nem osztható m_0-lal. Mivel ezen utóbbi hatványok száma nem nagyobb az egyenletek számánál, ezért ezek kifejezhetők a b pozitív egész kitevős hatványaival, és így a kiinduló egyenlet

$$\alpha_{m_0}b+\cdots+\alpha_r b^r=0$$

alakra hozható, amelyben $\alpha_{m_0}\neq 0$ és még legalább egy másik együttható sem egyenlő a nullával. Mivel a b elem nem nilpotens, ezért a bizonyítás első részét a b elemre alkalmazva (az ottani a helyett) adódik, hogy az $\mathcal{A}$ algebrának van nem nulla idempotens eleme. □

15.7. Tétel *Legyen $\mathcal{A}$ olyan véges dimenziós algebra, amelynek nem minden eleme nilpotens. Akkor $\mathcal{A}$ tetszőleges nem valódi a nilpotens eleméhez van olyan $0\neq e\in\mathcal{A}$ idempotens elem és olyan $x\in\mathcal{A}$ elem, hogy $ax=e$.*

Bizonyítás. Legyen $a\in\mathcal{A}$ tetszőleges nem valódi nilpotens elem. Akkor $a\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}$ algebra egy részalgebrája. Ha ez nem tartalmaz idempotens elemet, akkor a 15.6. Tétel miatt minden eleme nilpotens. Ez viszont azt jelenti, hogy a valódi nilpotens elem, ami ellentmond a feltételnek. Így $a\mathcal{A}$ tartalmaz legalább egy e nullától különböző idempotens elemet, s ezért $ax=e$ teljesül valamely $x\in\mathcal{A}$ elemre. □

15.8. Tétel *Egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra összes valódi nilpotens elemeinek halmaza az $\mathcal{A}$ algebrának egy ideálja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós algebra. Először megmutatjuk, hogy ha a az $\mathcal{A}$ algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges $\alpha\in\mathbb{F}$ elem esetén αa is valódi nilpotens elem. Legyen $a\in\mathcal{A}$ tetszőleges valódi nilpotens elem. Akkor minden $s\in\mathcal{A}$ és minden $\alpha\in\mathbb{F}$ esetén megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$0=((\alpha s)a)^n=(s(\alpha a))^n,$$

amiből már következik, hogy αa valódi nilpotens elem.

Az előzőekből az is következik, hogy valamely a valódi nilpotens elem ellentettje, azaz $-a$ is valódi, hiszen $-a = (-1)a$. Itt -1 jelöli az $\mathbb{F}$ test egységelemének ellentettjét.

A következőkben megmutatjuk, hogy ha a az $\mathcal{A}$ algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges $s \in \mathcal{A}$ elem esetén sa és as is valódi nilpotens elemek. Ha a valódi nilpotens elem, akkor tetszőleges $x, s \in \mathcal{A}$ elemek esetén megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$0 = ((xs)a)^n = (x(sa))^n.$$

Tehát sa valódi nilpotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy as is valódi nilpotens elem.

Már csak annak bizonyítása van hátra, hogy az $\mathcal{A}$ algebra valódi nilpotens elemeinek összege is valódi nilpotens. Legyenek a és b az $\mathcal{A}$ algebra valódi nilpotens elemei. Tegyük fel, indirekt módon, hogy $a + b$ nem valódi nilpotens elem. Akkor a 15.7. Tétel miatt van $\mathcal{A}$-nak olyan $e \neq 0$ idempotens eleme, hogy valamely $x \in \mathcal{A}$ elemre

$$(a + b)x = ax + bx = e.$$

A fentiek miatt ax és bx valódi nilpotens elemek. Így $eaxe$ és $ebxe$ nilpotens elemek. Ha n jelöli $eaxe$ nilpotenciájának fokát, akkor

$$0 = (eaxe)^n = (e - ebxe)^n = e - cbxe,$$

azaz

$$e = cbxe$$

teljesül valamely $c \in \mathcal{A}$ elemmel. Ez viszont ellentmondás, mert $cbxe$ valódi nilpotens elem, e pedig egy nem nulla idempotens elem. Tehát két valódi nilpotens elem összege is szükségképpen valódi nilpotens elem. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Egy $\mathcal{A}$ algebra valamely $\mathcal{B}$ ideálja esetén a $\mathcal{B}$ elemeiből képezhető összes k-tényezős szorzatok (k egy pozitív egész szám) halmaza által generált altér az $\mathcal{A}$ algebra ideálja. Ezt az ideált a $\mathcal{B}$ ideál k-dik hatványának nevezzük (és $\mathcal{B}^k$ módon jelöljük).

15.2. Véges dimenziós algebra nilpotens ideáljai

15.9. Definíció *Egy $\mathcal{A}$ algebra $\mathcal{B}$ ideálját nil ideálnak nevezzük, ha minden eleme nilpotens. Egy $\mathcal{B}$ ideált nilpotens ideálnak nevezünk, ha megadható olyan k pozitív egész szám, amelyre $\mathcal{B}^k = \{0\}$ teljesül, azaz a $\mathcal{B}$ elemiből képezhető összes k-tényezős szorzat egyenlő az $\mathcal{A}$ nullelemével.*

Az nyilvánvaló, hogy egy algebra minden nilpotens ideálja nil. Az állítás megfordítása általában nem igaz. Véges dimenziójú algebrák esetén más a helyzet. Érvényes a következő tétel.

15.10. Tétel *Véges dimenziós algebra minden nil ideálja nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra egy ideálja. Legyen a $\mathcal{B}$ dimenziója n. Legyenek $b_1, \ldots, b_{n+2} \in \mathcal{B}$ tetszőleges elemek. Az világos, hogy

$$b_1\mathcal{B}, b_1b_2\mathcal{B}, \ldots, b_1b_2\cdots b_{n+1}\mathcal{B}, b_1b_2\cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

a $\mathcal{B}$ ideál olyan részalgebrái, amelyekre

$$b_1\mathcal{B} \supseteq b_1b_2\mathcal{B} \supseteq \cdots \supseteq b_1b_2\cdots b_{n+1}\mathcal{B} \supseteq b_1b_2\cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

teljesül. Mivel ennek a láncnak a hossza $n+2$, ezért ez a lánc nem lehet szigorúan monoton csökkenő, azaz van olyan $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ index, hogy

$$b_1\cdots b_k\mathcal{B} = b_1\cdots b_kb_{k+1}\mathcal{B}.$$

Mivel

$$b_1\cdots b_kb_{k+1} \in b_1\cdots b_k\mathcal{B},$$

ezért

$$b_1\cdots b_kb_{k+1} \in b_1\cdots b_kb_{k+1}\mathcal{B},$$

és ezért van olyan $x \in \mathcal{B}$ elem, amelyre

$$b_1\cdots b_kb_{k+1} = b_1\cdots b_kb_{k+1}x$$

teljesül. Ebből az egyenlőségből

$$b_1\cdots b_kb_{k+1} = b_1\cdots b_kb_{k+1}x^t$$

adódik minden pozitív egész t kitevőre. Mivel $\mathcal{B}$ nil ideál, ezért $x^m = 0$ valamely pozitív egész m kitevőre. Ebből pedig

$$b_1\cdots b_kb_{k+1} = 0$$

következik. Mivel $k+1 \leq n+2$, ezért

$$b_1\cdots b_k\cdots b_{n+2} = 0,$$

és így

$$\mathcal{B}^{n+2} = \{0\}.$$

□

15.11. Megjegyzés *Mivel egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra minden $\mathcal{B}$ részalgebrája is véges dimenziós algebra és $\mathcal{B}$ ideálja önmagának, ezért ha $\mathcal{B}$ minden eleme nilpotens, akkor $\mathcal{B}$ nilpotens, azaz megadható olyan k pozitív egész szám, hogy $\mathcal{B}$ elemiből képezett k-tényezős szorzatok mindegyike egyenlő a nullelemmel.*

15.12. Megjegyzés *Az világos, hogy egy algebra valódi nilpotens elemeinek mindegyike nilpotens. A 15.8. Tétel szerint egy véges dimenziós algebra összes valódi nilpotens elemei ideált alkotnak. Így ebben az ideálban minden elem nilpotens. Következésképpen ez az ideál nilpotens ideál.*

Egy $\mathcal{A}$ algebrát nilpotens algebrának nevezünk, ha $\mathcal{A}^k = \{0\}$ valamely k pozitív egész számra. Véges dimenziójú algebra esetén ez azzal ekvivalens (lásd a 15.10. Tételt), hogy minden eleme nilpotens.

15.13. Tétel *Véges dimenziós nilpotens algebra minden epimorf képe is nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy véges dimenziós nilpotens algebra és φ az $\mathcal{A}$-nak egy $\mathcal{T}$ algebrára való homomorfizmusa. Legyen $\varphi(x) \in \mathcal{T}$ $(x \in \mathcal{A})$ tetszőleges elem. Akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \varphi(0_A) = 0_T,$$

ahol 0_A és 0_T jelöli az $\mathcal{A}$, illetve a $\mathcal{T}$ algebra nullelemét. Így $\mathcal{T}$ minden eleme nilpotens. Mivel $\mathcal{T}$ is véges dimenziós algebra, ezért a 15.10. Tétel miatt $\mathcal{T}$ nilpotens. □

15.14. Tétel *Ha egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebrának $\mathcal{B}$ olyan nilpotens ideálja, hogy az $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ faktoralgebra nilpotens, akkor $\mathcal{A}$ is nilpotens.*

Bizonyítás. Jelölje φ az $\mathcal{A}$ algebrának az $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ faktoralgebrára való természetes homomorfizmusát. Legyen $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges elem. Akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(a))^n = 0_{A/B}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$a^n \in \mathcal{B},$$

és ezért

$$(a^n)^k = 0_A$$

valamely pozitív egész k kitevőre. Tehát $\mathcal{A}$ minden eleme nilpotens. A 15.10. Tétel miatt $\mathcal{A}$ nilpotens algebra. □

15.15. Tétel *Véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra összes nilpotens ideáljainak $\mathcal{U}$ összege szintén nilpotens; $\mathcal{U}$ tartalmazza $\mathcal{A}$ összes nilpotens bal oldali ideálját és összes nilpotens jobb oldali ideálját is.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra nilpotens ideáljai. Akkor

$$(\mathcal{B}+\mathcal{C})/\mathcal{B} \cong \mathcal{C}/(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}).$$

A 15.14. Tétel miatt $\mathcal{B}+\mathcal{C}$ nilpotens ideál. Tehát $\mathcal{A}$-ban véges sok nilpotens ideál összege is nilpotens.

Legyen $a \in \mathcal{U}$ tetszőleges. Akkor megadhatók olyan $\mathcal{A}$-beli $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ nilpotens ideálok, hogy

$$a = a_1 + \cdots + a_k$$

valamely $a_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots k)$ elemekre. Mivel az $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ nilpotens ideálok összege nilpotens, ezért az $a \in \mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_k$ elem is nilpotens. Tehát $\mathcal{U}$ minden eleme nilpotens. A 15.10. Tétel miatt $\mathcal{U}$ nilpotens ideál.

Legyen $\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$ algebra egy nilpotens jobb oldali ideálja. Akkor $\mathcal{R}+\mathcal{A}\mathcal{R}$ az $\mathcal{A}$ algebra egy ideálja. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$(\mathcal{R}+\mathcal{A}\mathcal{R})^n \subseteq \mathcal{R}^n + \mathcal{A}\mathcal{R}^n$$

teljesül tetszőleges n pozitív egész szám esetén. Mivel $\mathcal{R}$ nilpotens, ezért az előző tartalmazásból követezik, hogy $\mathcal{R}+\mathcal{A}\mathcal{R}$ is nilpotens. Mivel

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}+\mathcal{A}\mathcal{R},$$

ezért $\mathcal{R}$ minden eleme nilpotens, és így a 15.11. Megjegyzés szerint $\mathcal{R}$ nilpotens, azaz $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$. Hasonlóan igazolható, hogy $\mathcal{U}$ tartalmazza az $\mathcal{A}$ algebra összes nilpotens bal oldali ideálját is. □

15.16. Definíció *Egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra összes nilpotens ideáljának összegét az algebra nilradikáljának nevezzük, és $\mathcal{R}$-rel jelöljük.*

15.17. Tétel *Véges dimenziós algebra nilradikálja megegyezik a valódi nilpotens elemeinek halmazával.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{R}$ egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra nilradikálja. Jelölje $\mathcal{V}$ az $\mathcal{A}$ valódi nilpotens elemeinek halmazát. A 15.12. Megjegyzés miatt

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}.$$

Ha $r \in \mathcal{R}$ és $a \in \mathcal{A}$, akkor $ar \in \mathcal{R}$ és így $\mathcal{R}$ nilpotens volta miatt ar nilpotens elem, ami miatt a valódi nilpotens elem, s ezért $a \in \mathcal{V}$. Tehát

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}.$$

Következésképpen

$$\mathcal{R} = \mathcal{V}.$$

□

15.3. Féligegyszerű algebrák

15.18. Definíció *Egy $\mathcal{A}$ algebrát féligegyszerű algebrának nevezünk, ha nilradikálja triviális, azaz $\mathcal{R} = \{0\}$.*

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbiakat:

15.19. Tétel *(Wedderburn 1. tétele) Egy véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha előáll véges sok olyan $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ kétoldali ideáljának*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$$

direkt összegeként, amelyek mindegyike egyszerű algebra (azaz nincs valódi ideáljuk). A direkt felbontásban szereplő ideálok az $\mathcal{A}$ algebra által egyértelműen meg vannak határozva.

A 15.19. Tételben szereplő felbontásban előforduló $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ideálokat az $\mathcal{A}$ algebra egyszerű komponenseinek nevezzük. Ezek számát $Cl(\mathcal{A})$-val jelöljük és az $\mathcal{A}$ algebra osztályszámának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a 15.19. Tételben szereplő $\mathcal{A}$ algebra bármely nem-nulla $\mathcal{B}$ ideálja esetén megadhatók az

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$$

felbontásban szereplő ideálok közül olyanok, amelyek úniója a $\mathcal{B}$ ideál.

15.20. Tétel *Legyen*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \cdots \mathcal{B}_n \supset \mathcal{B}_{m+1} = \{0\}$$

egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra relatív ideálsorozata (azaz $\mathcal{B}_{i+1}$ ideálja $\mathcal{B}_i$-nek $(i = 1, \ldots, m)$). Az $\mathcal{A}$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, m)$ faktoralgebrák mindegyike féligegyszerű. Ebben az esetben

$$Cl(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} Cl(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}).$$

15.21. Tétel *(Wedderburn 2. tétele) Egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós $\mathcal{A}$ algebra akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf egy $\mathbb{F}$ test feletti divízióalgebra (olyan algebra, amely ferdetest) elemeiből képezett $n \times n$-típusú mátrixok teljes mátrixgyűrűjével, ahol n egy pozitív egész szám. Az n egyértelműen, a divízióalgebra pedig izomorfia erejéig egyértelműen van meghatározva az $\mathcal{A}$ algebra által.*

15.4. Félcsoportalgebrák

15.22. Definíció *Legyen S egy félcsoport, $\mathbb{F}$ pedig egy test. Az S félcsoport $\mathbb{F}$ feletti algebráján egy olyan $\mathbb{F}$ feletti $\mathcal{A}$ algebrát értünk, amely tartalmaz egy olyan $\overline{S}$ részhalmazt, amely bázisa $\mathcal{A}$-nak, mint vektortérnek, és egyben az $\mathcal{A}$ algebra multiplikatív félcsoportjának egy olyan részfélcsoportja, amely izomorf S-sel.*

15.23. Tétel *Tetszőleges S félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén létezik S-nek $\mathbb{F}$ feletti algebrája, amely (izomorfizmus erejéig) egyértelműen van meghatározva.*

Bizonyítás. Tetszőleges S félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ esetén jelölje $\mathbb{F}[S]$ az S félcsoportnak az $\mathbb{F}$ testbe való összes olyan

$$a \ : \ s \ \mapsto \ a(s)$$

leképezéseinek halmazát, amelyek esetén az S mindazon s elemeinek halmaza, amelyekre $a(s) \neq 0$ teljesül, véges vagy üres. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\mathbb{F}[S]$ kommutatív csoportot alkot az

$$a + b \ : \ s \ \mapsto \ a(s) + b(s)$$

műveletre nézve. Továbbá $\mathbb{F}[S]$ vektortér $\mathbb{F}$ felett, ha egy $\alpha \in \mathbb{F}$ skalárral való szorzást az alábbi módon értelmezzük:

$$(\alpha a) \ : \ s \ \mapsto \ \alpha a(s).$$

Definiáljunk az $\mathbb{F}[S]$ halmazon egy szorzást a következőképpen: valamely $a, b \in \mathbb{F}[S]$ elemek szorzata legyen az a $c \in \mathbb{F}[S]$ elem, amelyre

$$c(s) = \sum_{xy=s} a(x)b(y)$$

teljesül tetszőleges $s \in S$ elem esetén. Nem nehéz belátni, hogy ezzel a müvelettel $\mathbb{F}[S]$ egy $\mathbb{F}$ feletti algebra.

Tetszőleges $s \in S$ elem esetén jelölje $\overline{s}(t)$ az $\mathbb{F}[S]$ következő elemét:

$$\overline{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = s \\ 0, & \text{ha } t \neq s. \end{cases}.$$

Itt 1, illetve 0 az $\mathbb{F}$ test egységelemét, illetve nullelemét jelöli. Nem nehéz belátni, hogy ezen $\overline{s}(t)$ leképezések $\overline{S}$ halmaza az $\mathbb{F}[S]$ algebra multiplikatív félcsoportjának olyan részfélcsoportja, amely izomorf az S félcsoporttal ($s \ \mapsto \ \overline{s}$ egy izomorfizmus). Továbbá, $\overline{S}$ az $\mathbb{F}[S]$ egy bázisa. Ha $a \in \mathbb{F}[S]$ tetszőleges, és $s_1, \dots s_k$ az S mindazon elemeinek halmaza, amelyekre $a(s_i) \neq 0$ $(i = 1, \dots, k)$, akkor

$$a = \alpha_1 \overline{s}_1 + \cdots + \alpha_k \overline{s}_k, \tag{15.1}$$

ahol $\alpha_i = a(s_i)$ $(i = 1, \dots, k)$. Az világos, hogy S bármely $\mathbb{F}$ feletti algebrája egymással izomorf, mivel bázisaik izomorfak az S félcsoporttal. $\square$

Ha az $\overline{S}$ elemeit azonosítjuk az S elemeivel, akkor a (15.1) egyenlőség a következő alakban is írható:

$$a = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k.$$

Véges $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ félcsoport esetén $\mathbb{F}[S]$ tetszőleges a eleme

$$a = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$$

alakban írható, mert azoknak a tagoknak az együtthatói, amelyek ténylegesen nem szerepelnek az összegben választhatók 0-nak. Így ha $a = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$ és $b = \beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n$ az $\mathbb{F}[S]$ tetszőleges elemei, valamint $\xi \in \mathbb{F}$, akkor

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)s_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)s_n,$$

$$\xi a = (\xi\alpha_1)s_1 + \cdots + (\xi\alpha_n)s_n,$$

$$ab = \gamma_1 s_1 + \cdots + \gamma_n s_n,$$

ahol $\gamma_k = 0$, ha $s_k \notin S^2$, egyébként pedig

$$\gamma_k = \sum_{1 \le i,j \le n; s_i s_j = s_k} \alpha_i \beta_j.$$

15.24. Tétel *(Maschke-tétel) Legyen G egy véges csoport, $\mathbb{F}$ pedig egy tetszőleges test. Az $\mathbb{F}[G]$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az $\mathbb{F}$ test karakterisztikája nem osztja a G csoport rendjét.*

15.25. Definíció *Legyen S egy 0-elemes félcsoport, $\mathbb{F}$ pedig egy test. Jelölje $\mathbb{F}_0[S]$ azt az $\mathbb{F}$ feletti algebrát, melynek van olyan B bázisa, amelyre $B \cup \{0\}$ az $\mathbb{F}_0[S]$ algebra multiplikatív félcsoportjának az S félcsoporttal izomorf részfélcsoportja.*

15.26. Megjegyzés *Ha egy S félcsoporthoz adjungálunk egy nullelemet (függetlenül attól, hogy S-ben van-e nullelem vagy nincs), akkor az így keletkezett $S \cup \{0\}$ félcsoportra $\mathbb{F}_0[S \cup \{0\}] \cong \mathbb{F}[S]$ teljesül.*

15.27. Tétel *Bármely S félcsoport tetszőleges T ideálja esetén $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$.*

Bizonyítás. Legyen T az S félcsoport tetszőleges ideálja. Az világos, hogy $\mathbb{F}[T]$ ideálja $\mathbb{F}[S]$-nek. Ha $s, t \in S \setminus T$ és $s \neq t$, akkor

$$(s + \mathbb{F}[T]) \cap (t + \mathbb{F}[T]) = \emptyset.$$

Ellenkező esetben $s - t$ az $\mathbb{F}[T]$-nek lenne eleme, ami $s, t \in S \setminus T$ miatt nem lehetséges, hiszen $\mathbb{F}[T]$ elemei a T elemeiből $\mathbb{F}$-beli együtthatókkal képezett formális összegek. Legyen

$$B = \{s + \mathbb{F}[T] : \ s \in S \setminus T\}.$$

Világos, hogy $B \cup \mathbb{F}[T]$ az $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T]$ algebra multiplikatív félcsoportjának az S/T faktorfélcsoporttal izomorf részfélcsoportja. Az is igaz, hogy B az $\mathbb{F}[S]$ algebra bázisa. Így $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$. $\square$

15.28. Tétel *Véges* 0*-elemes* S *félcsoport esetén az* $\mathbb{F}[S]$ *algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az* $\mathbb{F}_0[S]$ *algebra féligegyszerű.*

Bizonyítás. Jelölje 0 az S nullelemét. Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test. A 15.24. Tétel miatt $\mathbb{F}[0]$ féligegyszerű. A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}_0[S] \cong \mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0].$$

Mivel

$$\mathbb{F}[S] \supseteq \mathbb{F}[0]$$

a $\mathbb{F}[S]$ algebra egy relatív ideálsorozata, ezért a 15.20. Tétel szerint $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0]$, azaz $\mathbb{F}_0[S]$ féligegyszerű. □

Egy véges S félcsoport mindig tartalmaz

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatot (lásd a 4.34. Definíciót). A 4.36. Tétel szerint S bármely két fősorozata egymással izomorf.

15.29. Tétel *Egy véges* S *félcsoport esetén az* $\mathbb{F}[S]$ *algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az* S *félcsoport tetszőleges*

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatához tartozó $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ $(i = 1, \dots, n)$ *algebrák mindegyike féligegyszerű (megjegyezzük, hogy* $S_n/\emptyset \cong S_n$*).*

Bizonyítás. Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

egy véges S félcsoport fősorozata. Akkor

$$\mathbb{F}[S] = \mathbb{F}[S_1] \supset \mathbb{F}[S_2] \supset \cdots \supset \mathbb{F}[S_n] \supset \{0\}$$

a $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra ideáljainak egy sorozata (itt $\{0\} = \mathbb{F}[\emptyset]$). A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}] \cong \mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]; \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Ugyanakkor

$$\mathbb{F}[S_n]/\mathbb{F}[S_{n+1}] = \mathbb{F}[S_n] \cong \mathbb{F}_0[S_n] = \mathbb{F}_0[S_n/S_{n+1}].$$

A 15.20. Tétel szerint $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a fenti $\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}]$ $(i = 1, \dots, n)$ faktorok mindegyike féligegyszerű. Így a 15.28. Tételt is használva, $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. □

A 4.33. Definíció szerint egy S félcsoportot féligegyszerű félcsoportnak nevezünk, ha főfaktorai (azaz a fősorozatainak faktorai) egyszerűek vagy 0-egyszerűek.

15.30. Tétel *Ha egy véges S félcsoport esetén az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra féligegyszerű, akkor az S félcsoport féligegyszerű.*

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoport, amely esetén $\mathbb{F}[S]$ féligegyszerű algebra. Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

az S egy fősorozata. A 15.29. Tétel szerint az $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. A 15.28. Tétel szerint az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. Ebből már következik, hogy az S_i/S_{i+1} faktorfélcsoportban nem lehet bármely két elem szorzata nulla, mert ha az lenne, akkor az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebrában is bármely két elem szorzata a nulla lenne, ami viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebra féligegyszerű. □

A fejezet végén bizonyítás nélkül megemlítünk speciális félcsoportok félcsoportalgebrájával kapcsolatos néhány tételt.

15.31. Tétel *Legyen $\mathbb{F}$ egy test és G egy véges csoport. Jelölje G^0 az $\mathbb{F}[G]$ algebra $G \cup \{0\}$ részfélcsoportját, ahol 0 jelöli az $\mathbb{F}[G]$ algebra nullelemét. Egy véges 0-egyszerű $S = \mathcal{M}^0(G; m, n; \mathbf{P})$ félcsoport akkor és csak akkor féligegyszerű, ha $\mathbb{F}$ karakterisztikája nem osztja a G rendjét és a $\mathbf{P}$ szendvicsmátrix olyan négyzetes mátrix, amely reguláris (mint egy $\mathbb{F}[G]$ feletti mátrix).*

15.32. Tétel *Legyen S egy véges kommutatív félcsoport, $\mathbb{F}$ pedig egy test. Az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha S előáll olyan csoportok uniójaként, melyek rendje nem osztható az $\mathbb{F}$ test karakterisztikájával.*

15.33. Tétel *Ha egy véges egyszerű S félcsoport valamely $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája féligegyszerű, akkor S csoport.*

15.34. Tétel *Ha egy véges S félcsoport valamely $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája féligegyszerű, akkor S magja (azaz S összes ideáljának metszete) az S részcsoportja.*

15.35. Tétel *Egy véges inverz S félcsoport valamely $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az $\mathbb{F}$ test karakterisztikája 0 vagy olyan prímszám, amely nem osztja S egyetlen részcsoportjának rendjét sem.*

Feladatok

15.1. Feladat *(Megoldás: 17.43.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges, kommutatív p-csoport (p prímszám) és tetszőleges p-karakterisztikájú $\mathbb{F}$ test esetén az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra minden bal oldali nullosztója nilpotens.*

15.2. Feladat *(Megoldás: 17.44.) Mutassuk meg, hogy ha G egy véges p-csoport (p prímszám) és $\mathbb{F}$ egy p-karakterisztikájú test, akkor tetszőleges $g \in G$ elem esetén $e - g$ az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra nilpotens eleme, ahol e a G csoport egységeleme!*

16. fejezet

Félcsoportok mátrixreprezentációi

Ebben a fejezetben egy speciális mátrixreprezentációval, véges félcsoportok jobbreguláris reprezentációjával kapcsolatos mátrixreprezentációval foglalkozunk.

16.1. Jobbreguláris reprezentáció

Legyen S egy véges félcsoport, $\mathbb{F}$ pedig egy test. Az $S \times S$ halmaznak az $\mathbb{F}$ testbe való egyértelmű $\mathbf{A}$ leképezéseit $\mathbb{F}$ test feletti S-mátrixoknak nevezzük. Ha rögzítjük egy n-elemű S félcsoport elemeinek egy

$$\{s_1, \ldots, s_n\}$$

sorrendjét, akkor minden S-mátrix felírható a szokásos "táblázatos" formában: egy $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó $n \times n$-es táblázat i-dik sorának j-dik eleme megegyezik az $\mathbb{F}$ test $\mathbf{A}(s_i, s_j)$ elemével. A bizonyítások egyszerűbbé tétele végett a vizsgált S félcsoporthoz tartozó S-mátrixokat a félcsoport valamely rögzített sorrendjéhez tartozó, az előzőekben részletezett táblázatos formában fogjuk tekinteni.

Jelölje 1, illetve 0 egy $\mathbb{F}$ test egységelemét, illetve nullelemét. Egy véges $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ félcsoport tetszőleges s eleméhez tekintsük a következő S-mátrixot:

$$\mathbf{R}^{(s)} = [r_{i,j}^{(s)}]_{n \times n},$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} e & \text{ha } s_i s = s_j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezt a mátrixot az S elemhez tartozó $\mathbb{F}$ test feletti jobb mátrixnak nevezzük (lásd az 1. Fejezetet). Az 1.11. Tétel szerint

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}} : \ s \mapsto \mathbf{R}^{(s)}$$

az S félcsoport $\mathbb{F}$ test feletti n-edfokú reprezentációja. Ez lényegében az S félcsoport jobbreguláris reprezentációja. Ez a reprezentáció akkor és csak akkor hű (azaz injektív), ha S bal reduktív, azaz tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $xa = xb$ feltételnek tetszőleges $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik.

Tetszőleges n-elemű véges S félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén jelölje $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ az $\mathbb{F}$ test feletti $n \times n$ típusú mátrixok $M_n(\mathbb{F})$ teljes mátrixalgebrájának az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)$ által generált részalgebráját.

16.2. Félcsoportok direkt szorzatának jobbreguláris reprezentációja

16.1. Tétel *Tetszőleges véges bal reduktív S_1 és S_2 félcsoportok, valamint tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén*

$$dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))]dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))] = dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))].$$

Bizonyítás. Legyenek $S_1 = \{a_i : i = 1, \ldots, |S_1|\}$ és $S_2 = \{b_j : j = 1, \ldots, |S_2|\}$ tetszőleges véges bal reduktív félcsoportok, $\mathbb{F}$ pedig tetszőleges test. Tekintsük az S_1 és S_2 félcsoportok jobbreguláris reprezentációit. Jelölje $\mathbf{A}^{(a_i)}$ és $\mathbf{B}^{(b_j)}$ az $a_i \in S_1$ és $b_j \in S_2$ elemek $\mathbb{F}$ feletti (a fenti sorrendhez tartozó) jobb mátrixait. Tekintsük az $S_1 \times S_2$ félcsoport eleminek következő elrendezését:

$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, b_1); \ldots ; (a_1, b_{|S_2|}); \ldots ; (a_{|S_1|}, b_1); \ldots ; (a_{|S_1|}, b_{|S_2|})\}.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy egy $(a_i, b_j) \in S_1 \times S_2$ elemhez (az előbb részletezett sorrend szerint) tartozó $\mathbb{F}$ feletti $\mathbf{C}^{(a_i,b_j)}$ jobb mátrix olyan $\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i,b_j)}$ $(k, t \in \{1, \ldots, |S_1|\})$ mátrixok blokkmátrixa, amelyekre

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i,b_j)} = a_{k,t}^{(a_i)}\mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül, ahol $a_{k,t}^{(a_i)}$ $(k, t = 1, \ldots, |S_1|)$ jelöli az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ mátrix k-dik sorának t-dik elemét. Mivel S_1 és S_2 bal reduktív félcsoportok, ezért $S_1 \times S_2$ is bal reduktív. Így annak jobbreguláris reprezentációja hű. Tegyük fel, hogy $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) = m$ és $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) = n$. Jelölje $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$, illetve a $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ részalgebrák egy-egy bázisát. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{A}^{(a_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(a_m)}\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}^{(b_1)}, \ldots, \mathbf{B}^{(b_n)}\}$. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i,b_j)}$ $(i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n)$ mátrixok az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ részalgebrának egy bázisát alkotják.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i,b_j)}$ $(i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n)$ mátrixok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}$ felett, tegyük fel, hogy

$$\Sigma_{j=1}^{n}\Sigma_{i=1}^{m}\gamma_{j,i}\mathbf{C}^{(a_i,b_j)} = \mathbf{0}_{mn \times mn}$$

valamely $\gamma_{j,i} \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Akkor tetszőleges $k, t \in \{1, \ldots |S_1|\}$ indexekre

$$\Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} \gamma_{j,i} \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i,b_j)} = \mathbf{0}_{n\times n},$$

azaz

$$\Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n\times n}$$

adódik. Ekkor viszont

$$\Sigma_{j=1}^{n} (\Sigma_{i=1}^{m} \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n\times n},$$

amiből tetszőleges $j = 1, \ldots, n$ (and every $k, t = 1, \ldots, |S_1|$) index esetén

$$\Sigma_{i=1}^{m} \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} = 0,$$

mert a $\mathbf{B}^{(b_1)}, \ldots, \mathbf{B}^{(b_n)}$ mátrixok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}$ felett. Mivel a $\gamma_{j,i}$ együtthatók nem függnek k-tól és t-től, ezért

$$\Sigma_{i=1}^{m} \gamma_{j,i} \mathbf{A}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m\times m}$$

adódik minden $j = 1, \ldots, n$ indexre. Mivel a $\mathbf{A}^{(a_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(a_m)}$ mátrixok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}$ felett, ezért $\gamma_{j,i} = 0$ minden $j = 1, \ldots, n$ és $i = 1, \ldots, m$ indexre.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i,b_j)}$ $(i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n)$ mátrixok generálják az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ részalgebrát. Legyen $(x, y) \in S_1 \times S_2$ tetszőleges elem. Mivel $\mathcal{B}_2$ bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ részalgebrának, ezért, megadhatók olyan $\beta_j \in F$ $(j = 1, \ldots, n)$ skalárok, amelyekre

$$\mathbf{B}^{(y)} = \Sigma_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül. Ekkor viszont tetszőleges $k, t \in \{1, \ldots, |S_1|\}$ indexek esetén

$$a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} = \Sigma_{j=1}^{n} \beta_j a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(b_j)}.$$

Mivel $\mathcal{B}_1$ bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$ részalgebrának, ezért magadhatók olyan $\alpha_i \in F$ $(i = 1, \ldots, m)$ skalárok, melyekre

$$\mathbf{A}^{(x)} = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{A}^{(a_i)},$$

azaz,

$$a_{k,t}^{(x)} = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}$$

teljesül tetszőleges $k, t = 1, \ldots, |S_1|$ esetén. Így

$$a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} = \Sigma_{j=1}^{n} \beta_j (\Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} =$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} (\beta_j \alpha_i)(a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)}),$$

amiből

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(x,y)} = \Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i,b_j)}$$

következik tetszőleges $k, t = 1, \ldots, |S_1|$ indexekre. Mivel az α_i $(i = 1, \ldots, m)$ és β_j $(j = 1, \ldots, n)$ együtthatók nem függnek k-tól és t-től, ezért

$$\mathbf{C}^{(x,y)} = \Sigma_{j=1}^{n} \Sigma_{i=1}^{m} (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}^{(a_i, b_j)}. \qquad \square$$

16.2. Tétel *Legyen $\mathbb{F}$ egy test és legyenek S_1, S_2 tetszőleges véges bal reduktív félcsoportok. Akkor*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) \cong_{Alg} \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)),$$

ahol $\otimes$ a tenzori szorzás, $\cong_{Alg}$ pedig az algebra-izomorfizmus jele.

Bizonyítás. A 16.1. Tétel jelöléseit használjuk. Tekintsük az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$ és $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ vektorterek

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$$

tenzori szorzatát.

Az

$$\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)} \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots n)$$

tenzorok egy bázisát alkotják a $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ tenzori szorzatnak, melyek között a szorzás a következőképpen van értelmezve:

$$(\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)}) = (\mathbf{A}^{(a_i a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j b_t)}).$$

A 16.1. Tétel szerint

$$\{\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} : \; i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots, n\}$$

bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ algebrának. Közöttük a szorzás:

$$\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)}.$$

Mivel

$$dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) = dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)))$$

a 16.1. Tétel miatt, ezért a

$$\phi \;:\; (\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)}) \;\mapsto\; \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \quad i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n$$

leképezés az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ vektortérnek az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ vektortérre való izomorfizmusa. Mivel

$$\phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})) = \phi((\mathbf{A}^{(a_i, a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j, b_t)})) =$$

$$= \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} =$$

$$= \phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})) \phi((\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})),$$

ezért ϕ az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ tenzori szorzatnak az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ algebrára való algebra-izomorfizmusa. $\square$

16.3. Félcsoportok félhálójának jobbreguláris reprezentációja

16.3. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely valamely bal reduktív A és B félcsoportok félhálója. Akkor*

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

Bizonyítás. Világos, hogy A és B valamelyike ideálja S-nek. Tegyük fel, hogy A teljesíti ezt a feltételt. Ha $c, d \in S$ olyan elemei S-nek, amelyekre $xc = xd$ teljesül minden $x \in S$ elemre, akkor $c^2 = cd = d^2$ és így c és d mindketten vagy A-ban vagy B-ben vannak. Mivel A és B bal reduktív, ezért $c = d$. Tehát S bal reduktív, és így az S jobbreguláris reprezentációja hű. Legyen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Legyen $\mathbf{A}^{(a_i)}$ $(i = 1, \ldots n)$, illetve $\mathbf{B}^{(b_j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ az $a_i \in A$, illetve a $b_j \in B$ elemhez (a fenti sorrend szerint) tartozó jobb mátrix.

Tekintsük az S elemeinek következő sorrendjét:

$$S = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_m\}.$$

Az S félcsoport s elemeihez (ezen rögzített sorrend szerint) tartozó $\mathbf{C}^{(s)}$ jobb mátrixok olyan

$$\mathbf{C}^{(s)}_{k,t} \ (k, t \in \{1, 2\})$$

blokkok 2×2-típusú mátrixai, amely blokkokra a következők teljesülnek: a $\mathbf{C}^{(s)}_{1,1}$ blokk $n \times n$-típusú, a $\mathbf{C}^{(s)}_{2,2}$ blokk $m \times m$-típusú, továbbá tetszőleges $a_i \in A$ elem esetén $\mathbf{C}^{(a_i)}_{1,1} = \mathbf{A}^{(a_i)}$, $\mathbf{C}^{(a_i)}_{2,2} = \mathbf{0}_{m \times m}$, tetszőleges $b_j \in B$ esetén pedig $\mathbf{C}^{(b_j)}_{2,2} = \mathbf{B}^{(b_j)}$. Tegyük fel, hogy

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) = k \quad \text{és} \quad dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = t.$$

Legyen $\mathbf{A}^{(a_i)}$ $(i = 1, \ldots, k)$ illetve $\mathbf{B}^{(b_i)}$ $(j = 1, \ldots, t)$ egy-egy bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)$, illetve $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)$ algebrának. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i)}$ és $\mathbf{C}^{(b_j)}$ $(i = 1, \ldots k; j = 1, \ldots t)$ mátrixok együtt egy lineárisan független rendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy

$$\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} + \Sigma_{j=1}^{t} \beta_j \mathbf{C}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)}.$$

Akkor

$$\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)}_{2,2} + \Sigma_{j=1}^{t} \beta_j \mathbf{C}^{(b_j)}_{2,2} = \mathbf{0}_{m \times m}$$

és így

$$\Sigma_{j=1}^{t} \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{m \times m},$$

mert $\mathbf{C}^{(a_i)}_{2,2} = \mathbf{0}_{m \times m}$ és $\mathbf{C}^{(b_j)}_{2,2} = \mathbf{B}^{(b_j)}$ minden $a_i \in A$ és $b_j \in B$ elem esetén. Mivel a $\mathbf{B}^{(b_j)}$ $(j = 1, \ldots t)$ mátrixok lineárisan függetlenek, ezért $\beta_j = 0$ minden $j = 1, \ldots, t$ indexre. Így

$$\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)},$$

amiből

$$\mathbf{0}_{n\times n}=\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{C}_{1,1}^{(a_i)}=\Sigma_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{A}^{(a_i)}$$

következik. Mivel az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ $(i=1,\dots k)$ mátrixok lineárisan függetlenek, ezért $\alpha_i=0$ minden $i=1,\dots,k$ indexre. Tehát a

$$\mathbf{C}^{(a_1)},\dots,\mathbf{C}^{(a_k)},\mathbf{C}^{(b_1)},\dots,\mathbf{C}^{(b_t)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Így

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))\geq dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A))+dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).\qquad\square$$

16.4. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely előáll valamely bal reduktív A és B félcsoportok erős félhálójaként úgy, hogy $AB\subseteq A$. Ha $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B))=|B|$ akkor*

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))=dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A))+dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

Bizonyítás. A 16.3. Tétel jelöléseit használjuk. Mivel S az $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ and $B=\{b_1,\dots,b_m\}$ félcsoportok félhálója, és mert A ideálja S-nek, ezért megadható B-nek A-ba olyan φ homomorfizmusa, hogy $b_ja_i=(b_j)\varphi a_i$ teljesül minden $b_j\in B$ és $a_i\in A$ elemre. Ez a homomorfizmus indukálja az $\{1,\dots,m\}$ halmaznak az $\{1,\dots,n\}$ halmazba való következő φ^* leképezését: $\varphi^*(j)=i$ akkor és csak akkor, ha $(b_j)\varphi=a_i$. Ebből következik, hogy a $\mathbf{C}_{1,2}^{(a_i)}$ mátrix j-dik sora $(j=1,\dots,m)$ megegyezik az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ mátrix $(\varphi^*(j))$-dik sorával tetszőleges $a_i\in A$ elem esetén. Igy, ha egy $\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{A}^{(a_i)}$ lineáris kombináció egyenlő egy $\mathbf{A}^{(a)}$ $(a\in A)$ mátrixszal, akkor $\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$ egyenlő a $\mathbf{C}_{2,1}^{(a)}$ mátrixszal. Mivel $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B))=|B|=m$, ezért a 16.3. Tétel bizonyítása szerint a

$$\mathbf{C}^{(a_1)},\dots,\mathbf{C}^{(a_k)},\mathbf{C}^{(b_1)},\dots,\mathbf{C}^{(b_m)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Megmutatjuk, hogy generálják is az $\mathbb{F}_{(n+m)\times(n+m)}$ algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ részalgebráját. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy minden $\mathbf{C}^{(a_j)}$ $(j=k+1,\dots,n)$ mátrix előáll az $\mathbf{C}^{(a_1)},\dots,\mathbf{C}^{(a_k)},\mathbf{C}^{(b_1)},\dots,\mathbf{C}^{(b_m)}$ mátrixok lineáris kombinációjaként. Legyen $\mathbf{C}^{(a)}$, $a\in\{a_{j+1},\dots,a_n\}$ tetszőleges mátrix. Akkor

$$\mathbf{A}^{(a)}=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{A}^{(a_i)}$$

valamely $\beta_i\in\mathbb{F}$ skalárokkal. A fentiek szerint ebből az egyenlőségből

$$\mathbf{C}_{2,1}^{(a)}=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$$

következik, és így
$$\mathbf{C}^{(a)} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{C}^{(a_i)}.$$
Tehát a
$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \ldots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \ldots, \mathbf{C}^{(b_m)}$$
mátrixok az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ részalgebra egy bázisát alkotják. Következésképpen
$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$
□

16.5. Tétel *Ha egy véges S félcsoport valamely bal reduktív S_α $(\alpha \in Y)$ félcsoportok Y félhálója, akkor*
$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)).$$

Bizonyítás. Az állítást az $n = |Y|$-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az $n = 1$ esetben az állítás nyílvánvaló. Az $n = 2$ eset a 16.3. Tételből adódik. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $n \geq 3$. Tegyük fel azt is, hogy az állítás igaz minden n-nél kisebb számosságú Y félháló esetén. A továbbiakban tekintsünk egy olyan esetet, amelyben szereplő Y félhálóra $|Y| = n$ teljesül. Legyen S olyan véges félcsoport, amely bal reduktív S_α, $\alpha \in Y$ félcsoportok Y félhálója. Mivel Y félháló és $|Y| \geq 3$, ezért megadhatók olyan $\alpha, \beta \in Y$ elemek, amelyekre
$$\alpha\beta \neq \beta$$
teljesül. Jelölje I_β az Y félháló β eleem által generált ideálját. Világos, hogy
$$I_\beta = \{\xi \in Y : \ \xi\beta = \xi\}.$$
Mivel
$$\beta, \alpha\beta \in I_\beta,$$
ezért az $\alpha\beta \neq \beta$ feltételből
$$|I_\beta| \geq 2$$
következik.

Először tekintsük azt az esetet, amikor $I_\beta \neq Y$. Ekkor $|Y \setminus I_\beta| \leq n - 2$. Mivel I_β részfélcsoportja Y-nak, ezért az S félcsoport S_ξ $(\xi \in I_\beta)$ részfélcsoportjainak A_β-val jelölt uniója az S félcsoport egy részfélcsoportja. Mivel $I_\beta \subset Y$, ezért (az indukciós feltétel miatt)
$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi)).$$

Mivel I_β ideálja Y-nak, ezért az S félcsoport az S_η ($\eta \in Y \setminus I_\beta$) részfélcsoportok és az A_β részfélcsoport félhálója. Mivel $|Y \setminus I_\beta| + 1 \leq n - 1$, ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) + \sum_{\eta \in Y \setminus I_\beta} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\eta)).$$

Ez és a fenti

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi))$$

egyenlőtlenség együttesen a

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha))$$

egyenlőtlenséget eredményezik.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor $I_\beta = Y$. Ebben az esetben β az Y egységeleme, és így $\xi\eta \neq \beta$ minden $\beta \notin \{\xi, \eta\}$ elemekre. Valóban, ha lennének olyan $\xi, \eta \in Y$ elemek, amelyekre $\xi \neq \beta$, $\eta \neq \beta$ és $\eta\xi = \beta$ teljesülne, akkor minden $\alpha \in Y$ elem esetén azt kapnánk, hogy $\alpha\eta\xi = \alpha\beta = \alpha$, amiből $\alpha\xi = \alpha$ következne. Ez azt jelentené, hogy ξ az Y egységeleme, amely nem lehetséges amiatt, mert β is az Y egységelem és $\xi \neq \beta$. Igy $X = Y \setminus \{\beta\}$ az Y egy részfélhálója. Jelölje S^* az S félcsoport azon részfélcsoportját, amely az S_τ, $\tau \in X$ részfélcsoportok X félhálója. Akkor S az S^* és S_β részfélcsoportok félhálója, s ezért a 16.3. Tétel miatt

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) + dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\beta)).$$

Mivel $|X| = |Y| - 1$, ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) \geq \sum_{\tau \in X} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\tau)).$$

Következésképpen

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)).$$

□

16.6. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely valamely bal reduktív S_α ($\alpha \in Y$) félcsoportok Y félhálója. Ha minden $\alpha \in Y$ index esetén $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = |S_\alpha|$, akkor $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$.*

Bizonyítás. A 16.5. Tétel felhasználásával

$$\sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha| = |S| \geq dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = \sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha|$$

adódik, és így $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$. □

16.7. Tétel *Ha egy véges S félcsoport S_α ($\alpha \in Y$) monoidok Y félhálója, akkor*

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

Bizonyítás. Az világos, hogy minden M monoid bal reduktív, és $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(M)) = |M|$. Igy az állítás a 16.6. Tétel következménye. □

16.8. Tétel *Ha S véges Clifford félcsoport, akkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén*

$$dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

Bizonyítás. A 10.28. Tétel szerint egy félcsoport akkor és csak akkor Clifford félcsoport, ha csoportok félhálója. Igy az állítás a 16.7. Tétel következménye. □

16.9. Tétel *Ha S véges félháló, akkor tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén $dim\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$.*

Bizonyítás. Mivel egy félháló egyelemű félcsoportok félhálója, ezért az állítás a 16.7. Tétel következménye. □

Feladatok

16.1. Feladat *(Megoldás: 17.45.) Mutassuk meg, hogy véges $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül valamely $\alpha_i \in \mathbb{F}$ skalárok esetén, ha $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra jobb annullátorának eleme.*

16.2. Feladat *(Megoldás: 17.46.) Tetszőleges véges, n-elemű $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoport és tetszőleges $\mathbb{F}$ test esetén jelölje $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebrának az $M_n(\mathbb{F})$ teljes mátrixalgebrába való következő reprezentációját: $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n) = \alpha_1 \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_1) + \dots + \alpha_n \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_n)$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$ magja ($Ker\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^* = \{a \in \mathbb{F}[S] :\ \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(a) = \mathbf{0}$) megegyezik az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra jobb oldali annullátorával!*

17. fejezet

Megoldások

Az 1. fejezet feladatainak megoldásai

17.1. Megoldás *(az 1.1. feladat megoldása) Világos, hogy*

$$\mathbf{R}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és $(\mathbf{R}^{(a)})^2 = \mathbf{R}^{(a)}$, $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)}$, $\mathbf{R}^{(b)}\mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)}$, $(\mathbf{R}^{(b)})^2 = \mathbf{R}^{(b)}$. *Tehát* S_F^R *félcsoportot alkot a mátrixok szorzására nézve. Ugyanakkor* $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)} \neq \mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(ab)}$. *Igy* S *nem félcsoport a vizsgált műveletre nézve (pl.* $(ba)b = b^2 = a \neq b = ba = b(ab)$*).*

17.2. Megoldás *(az 1.2. feladat megoldása) Tetszőleges* $a_1, a_2, a_3 \in A$ *és* $b_1, b_2, b_3 \in B$ *elemek esetén* $((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1, b_2) * (a_3, b_3) = (a_1, b_3) == (a_1, b_1) * (a_2, b_3) = (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3))$. *Tehát a művelet asszociatív. Továbbá, tetszőleges* $(a, b) \in A \times B$ *esetén* $(a, b)^2 = (a, b) * (a, b) = (a, b)$, *és így az* $((A \times B); *)$ *félcsoport minden eleme idempotens.*

17.3. Megoldás *(az 1.3. feladat megoldása) Tetszőleges* $a, b \in S$ *és tetszőleges* $x, y \in A$ *elemek esetén* $(ab)(xy) = a(b(xy)) = a((bx)y) = (a(bx))y = ((ab)x)y$. *Tehát* S *zárt az* A*-beli műveletre nézve. Mivel tetszőleges* $a, b, c \in S$ *esetén* $a(bc) = (ab)c$, *ezért* S *az* A *gruppoid egy részfélcsoportja.*

17.4. Megoldás *(az 1.4. feladat megoldása) Az világos, hogy véges félcsoportnak véges sok részfélcsoportja van.*

Fordítva, tegyük fel, hogy S *olyan félcsoport, amelynek véges sok részfélcsoportja van. Az* S *tetszőleges eleme által generált ciklikus részfélcsoport nem lehet végtelen, mert végtelen ciklikus részfélcsoportnak végtelen sok részfélcsoportja van, amelyek az* S*-nek is részfélcsoportjai. Mivel* S *minden eleme benne van az általa generált részfélcsoportban, ezért* S *előáll véges ciklikus részfélcsoportok úniójaként. Mivel a feltétel miatt a ciklikus* *részcsoportok száma véges, ezért S előáll véges sok véges ciklikus részfélcsoport úniójaként. Ebből már következik, hogy S véges sok elemet tartalmaz.*

A 2. fejezet feladatainak megoldásai

17.5. Megoldás *(a 2.1. feladat megoldása) Az világos, hogy σ reflexív és szimmetrikus. A σ tranzitivitásának igazolásához tegyük fel, hogy valamely $a, b, c \in S$ elemekre teljesülnek az $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$ feltételek. Akkor $ab^n = b^{n+1}$, $ba^n = a^{n+1}$, $bc^n = c^{n+1}$ és $cb^n = b^{n+1}$ teljesül valamely n pozitív egész számra. Így $a^{2n} = a^{n+1}a^{n-1} = ba^n a^{n-1} = ba^{2n-1} = \cdots = b^n a^n$. Hasonlóan adódik, hogy $c^{2n} = b^n c^n$. Így $ac^{2n} = ab^n c^n = b^{n+1}c^n = bb^n c^n = bc^{2n} = bc^n c^n = c^{n+1}c^n = c^{2n+1}$. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy $ca^{2n} = a^{2n+1}$. Tehát $(a, c) \in \sigma$. Így σ tranzitív. Következésképpen σ ekvivalencia reláció.*

17.6. Megoldás *(a 2.2. feladat megoldása) Legyen S tetszőleges jobb zéró félcsoport! Legyen α az S halmazon értelmezett tetszőleges ekvivalenciareláció! Ha $(a, b) \in \alpha$ valamely $a, b \in S$ elemekre, akkor tetszőleges $s \in S$ elem esetén $as = s = bs$, és ezért $(as, bs) \in \alpha$. Tehát α jobb kongruencia. Továbbá, $sa = a \ \alpha \ b = sb$, amiből következik, hogy α bal kongruencia. A 2.22. Tétel szerint α az S egy kongruenciarelációja. Bal zéró félcsoportok esetén a megoldás hasonló.*

17.7. Megoldás *(a 2.3. feladat megoldása) Legyen S olyan jobb zéró félcsoport, amelyben bármely két kongruencia felcserélhető egymással. A 2.1.Feladat szerint S minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció, ezért S bármely két ekvivalenciarelációja felcserélhető egymással. Tegyük fel, hogy $|S| > 2$. Legyenek $a, b, c \in S$ páronként különböző elemek. Jelölje $\alpha_{a,b}$ az S azon ekvivalenciarelációját, melynek osztályai az S kételemű $\{a, b\}$ részhalmaza, valamint ezen részhalmaz komplementerében lévő elemek mint egyelemű részhalmazok. Jelölje $\alpha_{b,c}$ a kételemű $\{b, c\}$ részhalmazzal az előzőek mintájára definiált ekvivalenciarelációt. Mivel $(a, b) \in \alpha_{a,b}$ és $(b, c) \in \alpha_{b,c}$, ezért $(a, c) \in \alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c}$. Mivel a feltétel szerint $\alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c} = \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$, ezért $(a, c) \in \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$, azaz létezik olyan $x \in S$ elem, hogy $(a, x) \in \alpha_{b,c}$ és $(x, c) \in \alpha_{a,b}$. Mivel $a \notin \{b, c\}$, ezért $a = x$ és így $(a, c) \in \alpha_{a,b}$, amiből $c \in \{a, b\}$ következik, ami viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy a, b, c az S félcsoport páronként különböző elemei. Tehát szükségképpen $|S| \leq 2$ A fordított állítás igazolása igen egyszerű. A megoldás hasonló abban az esetben, amikor S bal zéró félcsoport.*

17.8. Megoldás *(a 2.4. feladat megoldása) Legyen S egy háromelemű félháló. Mivel S véges, ezért S-nek van 0 nulleleme (ez az S három elemének szorzata). Jelöljük a másik két elemet a-val, illetve b-vel. Ha $ab = 0$, akkor $I = \{0, a\}$ és $J = \{0, b\}$ ideálok. Legyen α az S azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai $I = \{0, a\}$ és $\{b\}$, továbbá jelölje β az S azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai $J = \{0, b\}$ és $\{a\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy α és β az S kongruenciarelációi. Mivel $(a, 0) \in \alpha$ és $(0, b) \in \beta$,* *ezért* $(a,b) \in \alpha \circ \beta$. *Ha* $\alpha \circ \beta$ *egyenlő lenne a* $\beta \circ \alpha$ *relációval, akkor* $(a,b) \in \beta \circ \alpha$ *teljesülne, azaz lenne* S*-nek olyan* y *eleme, hogy* $(a,y) \in \beta$ *és* $(y,b) \in \alpha$ *teljesülne. Az első feltételből* $y = a$ *adódna, ami miatt* $(a,b) \in \alpha$ *teljesülne, ami viszont nem lehetséges. Tehát* $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$. *Ha* $ab = ba \neq 0$, *akkor* $ab = ba = a$ *vagy* $ab = ba = b$. *Vizsgálhatjuk csak az egyik (pl.* $ab = ba = a$*) esetet. Jelölje* γ *azt az ekvivalenciarelációt, melynek osztályai* $\{a,b\}$ *és* $\{0\}$. *Legyen* α *az előzőekben definiált ekvivalenciareláció. Nem nehéz belátni, hogy* α *és* γ *az* S *kongruenciarelációi. Mivel* $(0,a) \in \alpha$ *és* $(a,b) \in \gamma$, *ezért* $(0,b) \in \alpha \circ \gamma$. *Ha* $(0,b)$ *benne lenne a* $\gamma \circ \alpha$ *relációban, akkor lenne* S*-nek olyan* x *eleme, hogy* $(0,x) \in \gamma$ *és* $(x,b) \in \alpha$ *teljesülne. Ebből* $x = 0$, *illetve* $(0,b) \in \alpha$ *következne, ami ellentmondás. Tehát* $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

17.9. Megoldás *(a 2.5. feladat megoldása) Az világos, hogy a* ϱ *reláció ekvivalenciareláció. Megmutatjuk, hogy* ϱ *az* S *félcsoport jobbkongruenciája, illetve balkongruenciája. Tegyük fel, hogy* $(a,b) \in \varrho$ *valamely* $a,b \in S$ *elemekre, azaz* $xa = xb$ *minden* $x \in S$ *elemre teljesül. Legyen* $c \in S$ *tetszőleges elem. Akkor* $xac = xbc$, *azaz* $(ac,bc) \in \varrho$. *Tehát* ϱ *jobbkongruencia. Mivel* $x(ca) = (xc)a = (xc)b = x(cb)$, *ezért* $(ca,cb) \in \varrho$. *Tehát* ϱ *balkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt* ϱ *az* S *félcsoport kongruenciája.*

A 3. fejezet feladatainak megoldásai

17.10. Megoldás *(a 3.1. feladat megoldása) Legyen* $\mathcal{F}_X$ *egy* X *halmaz feletti szabad félcsoport. A 3.15. Tétel szerint tetszőleges* S *félcsoport és tetszőleges* $f : X \mapsto S$ *leképezéshez megadható az* $\mathcal{F}_X$ *szabad félcsoportnak az* S *félcsoportba való olyan homomorfizmusa, amelyre* $\varphi(x) = f(x)$ *teljesül tetszőleges* $x \in X$ *esetén.*

Fordítva, tegyük fel, hogy F *olyan félcsoport, melynek van olyan* X *részhalmaza, amely generálja* F*-et és minden* S *félcsoport esetén* X*-nek* S*-be való tetszőleges* f *leképezése kiterjeszthető* F*-nek* S*-be való* φ *homomorfizmusává. Válasszuk* S*-et és* f*-et speciális módon; legyen* $S = \mathcal{F}_X$ *és* $f = id_X$, *azaz* X*-nek* $S = \mathcal{F}_X$*-be való azon leképezése, amely* X *minden elemének (*S*-beli) önmagát felelteti meg. A feltétel szerint van* F*-nek* $\mathcal{F}_X$*-be olyan* φ *homomorfizmusa, amely* X *minden eleméhez önmagát rendeli. Legyenek* $x_1, \dots, x_n \in X$ *tetszőleges elemek. Legyen* $x_1 \cdots x_n \in \mathcal{F}_X$ *tetszőleges elem. Mivel az* F*-beli* $x_1 \cdots x_n$ *szorzathoz* φ *az* $\mathcal{F}_X$ *félcsoport* $\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = x_1 \cdots x_n$ *elemét rendeli, ezért* φ *szürjektív. Ha* $\varphi(x_1 \cdots x_n) = \varphi(y_1 \cdots y_m)$ *valamely* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m \in X$ *esetén, akkor (mivel* φ *homorfizmus és* X *elemein az identikus)* $\mathcal{F}_X$*-ben* $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$, *amiből* $n = m$ *és* $x_i = y_i$ *következik minden* $i = 1, \dots, n$ *indexre. Tehát* F*-ben* $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$. *Így* φ *injektív. Következésképpen* F *izomorf* $\mathcal{F}_X$*-szel.*

17.11. Megoldás *(a 3.2. feladat megoldása) Legyenek* X *és* Y *olyan halmazok, amelyekhez létezik egy* $f : X \mapsto Y$ *bijektív leképezés. Tekintsük az* $\mathcal{F}_X$ *és* $\mathcal{F}_Y$ *szabad félcsoportokat. a 3.1.Feladat szerint megadható olyan* $\varphi : \mathcal{F}_X \mapsto \mathcal{F}_Y$ *homomorfizmus, amely az* f *kiterjesztése. Legyen* $y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_Y$ *tetszőleges elem. Mivel az* $\mathcal{F}_X$ *félcsoport*

$f^{-1}(y_1)\cdots f^{-1}(y_n)$ eleméhez φ az $\mathcal{F}_Y$ félcsoport $\varphi(f^{-1}(y_1))\cdots\varphi(f^{-1}(y_n)) =$ $= f(f^{-1}(y_1))\cdots f(f^{-1}(y_n)) = yx_1\cdots y_n$ elemét rendeli, ezért φ szürjektív. Ha $\varphi(x_1\cdots x_n)$ egyenlő $\varphi(x_1'\cdots x_m')$-mel valamely $x_1,\dots,x_n,x_1',\dots x_m'\in X$ esetén, akkor $\mathcal{F}_Y$-ban $f(x_1)\cdots f(x_n) = f(x_1')\cdots f(x_m')$, amiből $n = m$ és $f(x_i) = f(x_i')$ következik minden $i = 1,\dots,n$ indexre. Mivel f bijektív, ezért $x_i = x_i'$ minden $i = 1,\dots,n$ indexre. Tehát F-ben $x_1\cdots x_n = x_1'\cdots x_m'$. Így φ injektív. Tehát az $\mathcal{F}_X$ és $\mathcal{F}_Y$ szabad félcsoportok izomorfak.

A 4. fejezet feladatainak megoldásai

17.12. Megoldás *(a 4.1. feladat megoldása) Indirekt módon, tegyük fel, hogy van olyan S nil félcsoport, amely 0-egyszerű. Akkor $S^2\neq\{0\}$ (ekkor $S\setminus\{0\}\neq\emptyset$)és S nek csak két ideálja van: S és $\{0\}$. Legyenek $a,b\in S\setminus\{0\}$ tetszőleges elemek az $a\neq b$ feltétellel. A 4.7. Tétel szerint $SaS = S = SbS$. Igy megadhatók olyan $x,y,u,v\in S$ elemek, hogy $a = xby$ és $b = uav$. Ekkor $a = xuavy$, amiből $a = (xu)^n a(vy)^n$ következik tetszőleges pozitív egész n-re. Mivel $a\neq b$, ezért $xu\in S$ vagy $vy\in S$. Igy $(xu)^m = 0$ vagy $(vy)^k = 0$ valamely pozitív egész m, illetve k számokra. Igy $a = 0$, amiből $b = 0$ is következik. Tehát $S\setminus\{0\}$ csak egy elemet tartalmazhat. Ha a jelöli ezt az elemet, akkor $a^2 = 0$, mivel S nil félcsoport. Ekkor viszont $S^2\{0\}$, ami ellentmondás. Tehát nem fordulhat elő, hogy egy nil félcsoport 0-egyszerű lenne.*

17.13. Megoldás *(a 4.2. feladat megoldása) Legyen S egy $\mathcal{R}$-kommutatív félcsoport. Az S félcsoport Green-féle $\mathcal{R}$ ekvivalenciája bal oldali kongruencia. Először megmutatjuk, hogy bal kongruencia is. Legyenek $a,b,s\in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(a,b)\in\mathcal{R}$. Akkor megadhatók olyan $x,y\in S^1$ elemek, hogy $a = bx$ és $b = ay$. Ha $a = b$, akkor $as = bs$ és így $(as,bs)\in\mathcal{R}$. Ha $a\neq b$, akkor $x,y\in S$. Mivel az S félcsoport $\mathcal{R}$-kommutatív, ezért $as = bxs\in bsxS^1$ és $bs = ays\in asyS^1$. Tehát $(as,bs)\in\mathcal{R}$. Igy $\mathcal{R}$ bal oldali kongruencia. A 2.22. Tétel miatt $\mathcal{R}$ az S félcsoport kongruenciája. Mivel tetszőleges $a,b\in S$ elemek esetén $ab\in baS^1$ és $ba\in abS^1$, ezért $(ab,ba)\in\mathcal{R}$. Tehát $\mathcal{R}$ az S félcsoport kommutatív kongruenciája.*

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelyen a Green-féle $\mathcal{R}$ ekvivalencia kommutatív kongruencia. Akkor tetszőleges $a,b\in S$ elemek esetén $(ab,ba)\in\mathcal{R}$, azaz $abS^1 = baS^1$, amiből következik, hogy $ab\in baS^1$.

Az 5. fejezet feladatainak megoldásai

17.14. Megoldás *(az 5.1. feladat megoldása) Legyen S olyan félcsoport, melynek van bal oldali egységeleme. Legyenek $a,b\in S$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $xa = xb$ teljesül minden $x\in S$ elemre. Ha x helyebe az S egy bal oldali egységelemét írjuk, kapjuk az $a = b$ egyenlőséget.*

17.15. Megoldás *(az 5.2. feladat megoldása) Egy S félcsoport esetén az $a \mapsto \varrho_a$ $(a \in S)$ leképezés akkor és csak akkor injektív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén a $\varrho_a = \varrho_b$ feltételből, azaz az $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$ egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik. Mivel az $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$ egyenlőség az $xa = xb$ egyenlőséget jelenti, ezért már következik a feladat állítása.*

17.16. Megoldás *(az 5.3. feladat megoldása) Csak a balzéro esetet vizsgáljuk. Legyen L tetszőleges balzéró félcsoport. Ha λ az L tetszőleges önmagába való leképezése, akkor tetszőleges $a, b \in L$ elemek esetén $\lambda(ab) = \lambda(a) = (\lambda(a))b$. Tehát λ az L egy bal transzlációja, azaz L minden önmagába való leképezése bal transzláció. Legyen ϱ az L tetszőleges jobb transzlációja. Akkor tetszőleges $a, b \in L$ elemek esetén $a = a((b)\varrho) = (ab)\varrho = (a)\varrho$. Tehát L-nek csak egyetlen jobb transzlációja van; ez az L identikus leképezése. Ha λ az L tetszőleges önmagába való leképezése, és iota jelöli L identikus leképezését, akkor tetszőleges $a, b \in L$ esetén $a(\lambda(b)) = a = ab = ((a)\iota)b$. Tehát (λ, ι) láncszemet alkotnak. Az L transzlációs burka $(\Omega(S))$ az összes olyan (λ, ι) párból áll, ahol λ az L tetszőleges önmagába való leképezése. A $(\lambda, \iota) \mapsto \lambda$ leképezés $\Omega(L)$-nek az L összes önmagába való leképezéseinek félcsoportjára való izomorfizmus.*

17.17. Megoldás *(az 5.4. feladat megoldása) Legyen G tetszőleges csoport. Jelölje (λ, ϱ) a G transzlációs burkának egy elemét. Jelölje e a G egységelemét. Akkor $\lambda(e) = e(\lambda(e) = ((e)\varrho)e = (e)\varrho$. Legyen $g \in G$ tetszőleges elem. Akkor $\lambda(g) = \lambda(eg) = \lambda(e)g$ és $(g)\varrho = (ge)\varrho = g((e)\varrho)$. Tehát λ, illetve ϱ a G ugyanazon eleméhez tartozó belső bal, illetve jobb transzlációi. Így $\Omega(G)$ izomorf $\Omega_0(G)$-vel. Mivel G gyengén reduktív, ezért G izomorf $\Omega_0(G)$-vel. Következésképpen G transzlációs burka, $\Omega(G)$ izomorf G-vel.*

17.18. Megoldás *(az 5.5. feladat megoldása) Legyenek (a, b) és (c, d) tetszőleges $L \times R$-beli elemek. Tegyük fel, hogy minden $(x, y) \in L \times R$ elemre $(a, b)(x, y) = (c, d)(x, y)$ és $(x, y)(a, b) = (x, y)(c, d)$. Akkor $(a, y) = (ax, by) = (a, b)(x, y) = (c, d)(x, y) = (cx, dy) = (c, y)$, és így $a = c$. Továbbá, $(x, b) = (xa, yb) = (x, y)(a, b) = (x, y)(c, d) = (xc, yd) = (x, d)$, és így $b = d$. Követkwezésképpen $(a, b) = (c, d)$.*

A 6. fejezet feladatainak megoldásai

17.19. Megoldás *(a 6.1. feladat megoldása) Legyen $x \in S$ az $a \in S$ elem, $y \in S$ pedig a $b \in S$ elem inverze. Akkor $axa = a$, $xax = x$, $byb = b$ és $yby = y$. A 6.2. Tétel szerint ax, xa, by, yb idempotens elemek, így egymással felcserélhetőek a 6.20. Tétel szerint. Ekkor $ab(yx)ab = a(by)(xa)b = a(xa)(by)b = (axa)(byb) = ab$ és $(yx)(ab)(yx) = y(xa)(by)x = y(by)(xa)x = (yby)(xax) = yx$. Tehát $ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

17.20. Megoldás *(a 6.2. feladat megoldása) Legyen S egy kommutatív reguláris félcsoport. Akkor S teljesen reguláris, és ezért a 6.16. Tétel szerint S kommutatív csoportok úniója.*

17.21. Megoldás *(a 6.3. feladat megoldása) Legyen a egy S reguláris félcsoport tetszőleges eleme. Akkor van olyan $x \in S$ elem, amelyre*

$$axa = a$$

teljesül. A 6.2. Lemma szerint ax és xa idempotens elemek. Ha S-nek csak egyetlen idempotens eleme van, akkor

$$ax = xa,$$

és ezért az a elem teljesen reguláris. Így S teljesen reguláris félcsoport. A 6.16. Tétel szerint S csoportok uniója. Mivel S csak egyetlen idempotens elemet tartalmaz, ezért S csoport.

A 7. fejezet feladatainak megoldásai

17.22. Megoldás *(a 7.1. feladat megoldása) Legyen U egy bal egyszerű S félcsoport jobb unitér részfélcsoportja. Legyenek $a, b \in U$ tetszőleges elemek. Mivel S bal egyszerű, ezért a 7.2. Tétel duálisa szerint van S-nek olyan x eleme, amelyre $xa = b$ teljesül. Mivel U jobb unitér, ezért $a, xa \in U$ az $x \in U$ tartalmazást eredményezi. Tehát $Ua = U$ tetszőleges $a \in U$ esetén. Ez a 7.2. Tétel szerint éppen azt jelenti, hogy U bal egyszerű.*

17.23. Megoldás *(a 7.2. feladat megoldása) Legyen $b \in N$ tetszőleges elem. A 7.1.Feladat szerint N bal egyszerű. Igy van olyan $x \in N$ elem, melyre $b = xb$ teljesül. Tekintsük a H által definiált $\mathcal{P}_H$ főkongruenciát (2.32. Definíció). A 2.38. Tétel szerint (figyelembe véve, hogy S-nek önmagától különböző ideálja) $\mathcal{P}_H$ az S félcsoport csoport-kongruenciája; H ennek egyetlen osztálya, mégpedig a faktorcsoport egységeleme. Ezért tetszőleges $h \in H$ elem esetén $(b, hb) \in \mathcal{P}_H$. Igy $(xb, hb) \in \mathcal{P}_H$. Mivel $\mathcal{P}_H$ csoport-kongruencia, ezért $(x, h) \in \mathcal{P}_H$. Mivel $h \in H$ és H egyetlen $calP_H$-osztály, ezért $x \in H$, amiből $x \in N$ miatt $N \cap H \neq \emptyset$ következik.*

17.24. Megoldás *(a 7.3. feladat megoldása) A 7.2. Feladat szerint $N \cap H \neq \emptyset$. Könnyen igazolható, hogy $N \cap H$ reflexiv unitér részfélcsoportja S-nek, így N-nek is és H-nak is. Mivel az N félcsoport $N \cap H$ reflexív, unitér részfélcsoportja szerinti főkongruencia csoportkongruencia, ezért az N-re vonatkozó feltétel miatt $N \cap H = N$. Hasonlóan adódik, hogy $N \cap H = H$. Tehát $N = H$.*

A 8. fejezet feladatainak megoldásai

17.25. Megoldás *(a 8.1. feladat megoldása) Legyen S egy kommutatív, 0-egyszerű félcsoport. Tegyük fel, hogy $ab = 0$ teljesül valamely S-beli $a \neq 0$ és $b \neq 0$ elemekre. Mivel $A = \{x \in S : \ xb = 0\}$ ideálja S-nek és $a \in A$, ezért az S félcsoport 0-egyszerűsége* *miatt $A = S$. Így $Ab = \{0\}$. Legyen $B = \{y \in S :\ ay = \{0\}\}$. Világos, hogy B az S egy ideálja, és $b \in B$. Ezért $B = S$, amiből $S^2 = \{0\}$ következik. Ez viszont ellentmond az S félcsoport 0-egyszerűségének (ugyanis $S^2 \neq \{0\}$). Tehát $G = S - \{0\}$ az S félcsoport részfélcsoportja. Ha I ideálja G-nek, akkor $I \cup \{0\} \neq \{0\}$ ideálja S-nek, amiből $I \cup \{0\} = S$ következik. Ebből pedig $I = G$ adódik. Tehát G egy kommutatív egyszerű félcsoport, ami miatt G egy csoport. Így $S = G^0$. Az világos, hogy kommutatív G csoport esetén G^0 egy kommutatív 0-egyszerű félcsoport.*

17.26. Megoldás *(a 8.2. feladat megoldása) Legyen S egy 0-egyszerű nil félcsoport. Akkor $|S| \geq 2$. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az $a \neq 0$ és $b \neq 0$ feltétellel. Akkor $SaS = S$ és $SbS = S$ a 4.7. Tétel szerint. Így megadhatók olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, hogy $a = xby$ és $b = uav$. Ebből $a = xuavy$ adódik. Mivel S nil félcsoport, ezért van olyan n pozitív egész szám, hogy $a = (xu)^n a(vy)^n = 0a0 = 0$. Tehát $a = b$. Következésképpen $S = a \cup \{0\}$. Mivel S nil félcsoport, szükségképpen $a^2 = 0$, és így $S^2 = \{0\}$, ami ellentmondás.*

A 9. fejezet feladatainak megoldásai

17.27. Megoldás *(a 10.1. feladat megoldása) Legyen L egy balzéró, R pedig egy jobbzéró félcsoport. Ha $|L| = |R| = 1$, akkor $S = L \times R$ egyelemű, s ezért teljesen egyszerű. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 2$. Legyen I az S egy ideálja. Legyen $(a, b) \in I$ tetszőleges elem. Akkor tetszőleges $(x, y) \in S$ elemre $(x, y) = (xax, yby) = (x, y)(a, b)(x, y) \in I$, amiből következik, hogy $S = L \times R$ egyszerű félcsoport. Az világos, hogy S minden eleme idempotens. Legyen $(e, f) \in S$ tetszőleges elem. Ha valamely $(a, b) \in S$ elemre $(a, b) \leq (e, f)$, azaz $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b)$, akkor $(a, b) = (a, f) = (e, b)$, amiből $(a = e$ és $b = f$, azaz $(a, b) = (e, f)$ adódik. Tehát S minden eleme primitív idempotens. Így $S = L \times L$ teljesen egyszerű.*

17.28. Megoldás *(a 9.2. feladat megoldása) Legyenek A és B tetszőleges félcsoportok. Legyen $S = A \times B$. Tegyük fel, hogy A és B teljesen egyszerű félcsoportok. Legyen $(a, b) \in S$ tetszőleges elem. Mivel A és b egyszerű, ezért $AaA = A$ és $BbB = B$. Így $(A \times B)(a, b)(A \times B) = AaA \times BbB = A \times B$. Tehát $A \times B$ egyszerű félcsoport. Legyenek $e \in A$ és $f \in B$ primitív idempotens elemek. Akkor tetszőleges $(a, b) \in A \times B$ idempotens elem esetén az $(a, b) \leq (e, f)$ feltételből, azaz az $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b) =$ feltételből $(a, b) = (ae, bf) = (ea, fb)$, amiből pedig $a = ae = ea$ és $b = bf = fb$ következik. Mivel e és f primitív idempotensei A-nak, illetve B-nek, ezért $a = e$ és $b = f$, azaz $(a, b) = (e, f)$. Tehát (e, f) az $S = A \times B$ direkt szorzat primitív idempotens eleme. Tehát S teljesen egyszerű félcsoport.*

Fordítva, tegyük fel, hogy $S = A \times B$ teljesen egyszerű. Ha I_A az A félcsoport egy ideálja, akkor $I_A \times B$ az $A \times B$ félcsoport ideálja, és így megegyezik $A \times B$-vel, amiből $I_A = A$ következik. Tehát A egyszerű félcsoport. hasonlóan igazolható, hogy B is *egyszerű. Legyen (e, f) az $A \times B$ egy primitív idempotens eleme. Akkor e az A idempotens eleme. Ha $a = ae = ea$ teljesül valamely A-beli a idempotens elemre, akkor $(a, f) = (a, f)(e, f) = (e, f)(a, f)$, amiből $(a, f) = (e, f)$, azaz $a = e$ következik. tehát e az A primitív idempotens eleme. Hasonlóan igazolható, hogy f a B primitív idempotens eleme. Tehát A és B teljesen egyszerű félcsoportok.*

17.29. Megoldás *(a 9.3. feladat megoldása) Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. A 9.24. Tétel szerint S izomorf egy reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporttal. Legyen $(a)_{ij}$ tetszőleges nem nulla idempotens elem. Legyen $(b)_{kt}$ egy tetszőleges nem nulla idempotens elem a $(b)_{kt} \leq (a)_{ij}$ feltétellel. Akkor $(b)_{kt} = (b)_{kt}(a)_{ij} = (a)_{ij}(b)_{kt}$, amiből $(b)_{kt} = (bp_{ti}a)_{kj} = (ap_{jk}b)_{it}$ következik. Így $k = i$, $t = j$ és $b = bp_{ti}a = ap_{jk}b$ következik. Mivel $(b)_{kt} \neq 0$, ezért $b = p_{tk}^{-1}$, és így a $b = bp_{ti}a$ egyenlőségből $b = p_{tk}^{-1}p_{ti}a = p_{ti}^{-1}p_{ti}a = a$ adódik. Igy $(a)_{ij} = (b)_{kt}$. Tehát $(a)_{ij}$ primitív idempotens. Következésképpen S minden nem nulla idempotens eleme primitív.*

A 10. fejezet feladatainak megoldásai

17.30. Megoldás *(a 10.1. feladat megoldása) Az nyilvánvaló, hogy σ_J az S félcsoport ekvivalenciarelációja. Legyenek $a, b, s \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma_J$. Ha $a, b \in F$ valamely F filterre, akkor $sa, sb \in F$ vagy $sa, sa \notin F$ attól függően, hogy $s \in F$, vagy $s \notin F$. Ha $a, b \notin F$, akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $sa, sa \notin F$, mert F komplementere teljesen prím ideál. Tehát σ_J bal oldali kongruencia. Hasonlóan adódik, hogy σ_J jobb oldali kongruencia. Tehát σ_J az S félcsoport egy kongruenciája. Mivel minden F filterre és minden $a \in S$ elemre $a^2 \in F$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in F$, ezért $(a, a^2) \in \sigma_J$ minden $a \in S$ elemre. Tehát az S/σ_J faktorfélcsoport egy köteg. Tegyük fel, hogy $ab \in F$ teljesül S valamely F filtere és valamely a, b elemei esetén. Akkor $a \in F$ és $b \in F$, de ekkor $ba \in F$. Ezért $(ab, ba) \in \sigma_J$, s ezért az S/σ_J faktorfélcsoport egy félháló.*

17.31. Megoldás *(a 10.2. feladat megoldása) Legyen σ egy félháló-kongruenciája egy S félcsoportnak. Jelöljük az S/σ félhálót Y-nal, és a σ-osztályokat S_α-val ($\alpha \in Y$). Adott $\alpha \in Y$ elem esetén legyen $F_\alpha = \cup_{\beta \geq \alpha,\, \beta \in Y} S_\beta$. Ha $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\alpha = \alpha$ és $\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\delta\alpha = alpha$, és ezért $\beta\delta \geq \alpha$. Ebből az adódik, hogy F_α részfélcsoportja S-nek. Ha $\beta\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\alpha = alpha$ and $\delta\alpha = \alpha$, és így $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$. Ez viszont azt jelenti, hogy F_α filter. Legyen J az F_α filterek halmaza. Megmutatjuk, hogy $\sigma = \sigma_J$. Ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $a, b \in F_\alpha$ vagy $a, b \notin F_\alpha$ minden $\alpha \in Y$-ra. Ezért $(a, b) \in \sigma_J$. Tehát $\sigma \subseteq \sigma_J$. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma_J$. Jelölje ξ és η az Y azon elemeit, amelyekre $a \in S_\xi$ és $b \in S_\eta$ teljesül. Mivel $a \in F_\xi$, ezért $b \in F_\xi$, amiből $\eta \geq \xi$ következik. Mivel $b \in F_\eta$, ezért $a \in F_\eta$, amiből $\xi \geq \eta$ következik. Ezért $\xi = \eta$, azaz $(a, b) \in \sigma$. Tehát $\sigma_J \subseteq \sigma$. Következésképpen $\sigma = \sigma_J$.*

17.32. Megoldás *(a 10.3. feladat megoldása) Legyenek a és b egy S arkhimédeszi félcsoport tetszőleges elemei. Akkor $a^n = xby$ és $b^m = uav$ teljesül valamely pozitív egész n és m számra, valamint S valamely x, y, u, v elemeire. Legyen τ tetszőleges félháló-kongruencia S-en. Akkor*

$$a \ \tau \ a^n = xby \ \tau \ xb^{m+1}y \ \tau xb^m yb = xuavyb \ \tau(xby)(uav) =$$

$$a^n(uav) \ \tau ua^{n+1}v \ \tau uav = b^m \ \tau b.$$

Tehát τ az S félcsoport univerzális-relációja. Így S félháló-felbonthatatlan.

17.33. Megoldás *(a 10.4. feladat megoldása) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. A 10.15. Tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy S Putcha-félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy a osztja b-t, azaz $xay = b$ teljesül valamely $x, y \in S^1$ elemekre. Akkor $(bx)a(yb) = b^3$. Mivel $bx, a, yb \in S$, ezért megadható olyan m pozitív egész szám, valamint olyan $u, v \in S$ elemek, amelyekre $v(bx)a = ((bx)a(yb))^m = a(yb)u$. Ebből $b^{6m} = ((bx)a(yb))^{2m} = v(bx)aa(yb)u$ adódik. Tehát a^2 osztja a b elem 6m-edik hatványát.*

17.34. Megoldás *(a 10.5. feladat megoldása) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. Az előző feladat szerint előáll S_α $(\alpha \in Y)$ arkhimédeszi félcsoportok Y félhálójaként. Legyen $\alpha \in Y$ tetszőleges. Akkor tetszőleges $a, b \in S_\alpha$ elemekhez megadható olyan m pozitív egész szám, valamint olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $xa = (ab)^m = by$ teljesül. Ha $x \in S_\xi$ és $y \in S_\eta$, akkor az $\alpha\xi = \alpha$ és $\eta\alpha = \alpha$, azaz $S_\alpha S_\xi \subseteq S_\alpha$ és $S_\eta S_\alpha \subseteq S_\alpha$. Igy $(ab)x, \in S_\alpha$ és $y(ab) \in S_\alpha$ és $((ab)x)a = (ab)^{m+1} = b(y(ab))$. Tehát S_α gyengén kommutatív.*

A 11. fejezet feladatainak megoldásai

17.35. Megoldás *(a 11.1. feladat megoldása) A félcsoport szíve: $K = \{0, k_1, k_2\}$.*

17.36. Megoldás *(a 11.2. feladat megoldása) A félcsoport szíve: $K = \{0, u, v\}$.*

A 12. fejezet feladatainak megoldásai

17.37. Megoldás *(a 12.1. feladat megoldása) Legyen S egy háromelemű félháló. Akkor S-nek van nulleleme (a három elem szorzata). Jelölje a nullelemet 0, a másik két elemet pedig a és b. Tegyük fel, hogy S permutálható. Ha $ab = 0$, akkor $I = \{0, a\}$ és $J = \{0, b\}$ az S ideáljai. A 12.5. Tétel szerint permutálható félcsoport ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így $ab \neq 0$. Vizsgáljuk az $ab = a$ esetet. Akkor $I = \{0, a\}$ az S ideálja. Legyen α az S félháló azon ekvivalenciája, melynek osztályai $\{a, b\}$ és 0. Világos,* *hogy α az S félháló kongruenciája is. A 12.4. Tétel szerint I-nek benne kellene lenni valamely α-osztályban, vagy elő kellene állni α-osztályok uniójaként. Itt viszont egyik sem teljesül. Tehát az $ab = a$ feltétel is ellentmondáshoz vezet. Hasonló a helyzet az $a = b$ feltétel esetén is. Igy S nem lehet permutálható.*

17.38. Megoldás *(a 12.2. feladat megoldása) Elegendő azt megmutatni, hogy ha a főideálok láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, akkor az ideálok is láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen tehát S olyan félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyenek A és B az S tetszőleges ideáljai. Tegyük fel, hogy $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Akkor vannak olyan $a \in A$ és $b \in B$ elemek, hogy $a \notin B$ és $b \notin A$. A feltétel szerint $J(a) \subseteq J(b)$ vagy $J(b) \subseteq J(a)$. Az első esetben $J(b) \subseteq B$ miatt $a \in B$, ami ellentmondás. Hasonló okok miatt a második feltétel is ellentmondásra vezet. Igy S tetszőleges A és B ideáljai esetén az $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$ feltételek egyikének kell taljesülni. Tehát S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

A 13. fejezet feladatainak megoldásai

17.39. Megoldás *(a 13.1. feladat megoldása) A 13.1. Tétel szerint, ahhoz, hogy egy S félcsoport beágyazható legyen egy csoportba, szükségképpen S-nek egyszerűsítésesnek kell lennei. Fordítva, tegyük fel, hogy S gyengén kommutatív, egyszerűsítéses félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Mivel S gyengén kommutatív, ezért van olyan n pozitív egész szám, hogy*

$$(ab)^n \in Sa.$$

Mivel

$$(ab)^n \in Sb$$

nyílvánvalóan teljesül, ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát S jobbreverzibilis. A 13.4. Tétel szerint minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport beágyazható egy csoportba.

17.40. Megoldás *(a 13.2. feladat megoldása) Tegyük fel, hogy egy S félcsoport beágyazható egy periodikus G csoportba. Feltehetjük, hogy $S \subseteq G$. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Mivel G periodikus, ezért megadható olyan n pozitív egész szám, hogy $e = b^n \in S$. Ebből már következik a feladat állítása.*

A 14. fejezet feladatainak megoldásai

17.41. Megoldás *(a 14.1. feladat megoldása) Legyen S gyengén szeparatív félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $ax = bx$ és $xa = xb$ teljesül* *minden $x \in S$ elemre. Akkor az első egyenlőségből az $x = b$ választással $ab = b^2$, a második egyenlőségből az $x = a$ választással $a^2 = ab$ adódik. Tehát $a^2 = ab = b^2$. Mivel S gyengén szeparatív, ezért ezen utóbbi egyenlőségből $a = b$ következik. Tehát S gyengén reduktív.*

17.42. Megoldás *(a 14.2. feladat megoldása) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. Akkor S előáll gyengén kommutatív arkhimédeszi S_α ($\alpha \in Y$) félcsoportok félhálójaként. Tegyük fel, hogy ezek mindegyike gyengén egyszerűsítéses. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $a^2 = ab = b^2$. Akkor van olyan $\alpha \in Y$ elem, hogy $a, b \in S_\alpha$. Mivel S_α gyengén egyszerűsítéses, ezért $a = b$.*

A 15. fejezet feladatainak megoldásai

17.43. Megoldás *(a 15.1. feladat megoldása) A véges p-csoportok szükségképpen p-hatvány rendűek. Jelölje $q = p^n$ a G rendjét. Legyen $a \in \mathbb{F}[G]$ tetszőleges elem. Akkor $g = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_q g_q$ valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Ha a bal oldali nullosztó, akkor van olyan $0 \neq b \in \mathbb{F}[G]$ elem, hogy $0 = ab$, amiből $a^q b = 0$ következik. Mivel az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra kommutatív, ezért érvényes benne a binomiális tétel, és így (figyelembe véve, hogy $\mathbb{F}$ karakterisztikája p) $a^q = (alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_q g_q)^q = \alpha_1^q g_1^q + \cdots + \alpha_q^q g_q^q = \alpha_1^q e + \cdots + \alpha_q^q e = (\alpha_1^q + \cdots + \alpha_q^q)e$, ahol e jelöli a G csoport egységelemét. Igy $0 = a^q b = (\alpha_1^q + \cdots \alpha_q^q)eb = (\alpha_1^q + \cdots \alpha_q^q)b$, amiből $b \neq 0$ miatt $(\alpha_1^q + \cdots \alpha_q^q)$ következik. Igy $a^q = (\alpha_1^q + \cdots + \alpha_q^q)e = 0e = 0$. Tehát a nilpotens elem.*

17.44. Megoldás *(a 15.2. feladat megoldása) Legyen a G rendje p^k. Mivel e felcserélhető g-vel és $\mathbb{F}$ karakterisztikája p, ezért a binomiális tétel alkalmazásával $(e - g)^{p^k} = e - g^{p^k} = e - e = 0$.*

A 16. fejezet feladatainak megoldásai

17.45. Megoldás *(a 16.1. feladat megoldása) Megoldás: Jelölje $(\mathbb{F})^n$ az $\mathbb{F}$ test elemiből képezett n-elemű sorozatok vektorterét. Jól ismert tény, hogy megadható az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra $\{s_1, \ldots, s_n\}$ bázisának segítségével az $\mathbb{F}[S]$ vektortérnek az $(\mathbb{F})^n$ vektortérre való φ izomorfizmusa. Egy $a \in \mathbb{F}[S]$ elem $\varphi(a)$ képét az a elem $\{s_1, \ldots, s_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakjának nvezzük. Jelölje $\underline{e}_i$ az $s_i \in S \subseteq \mathbb{F}[S]$ elem koordinátás alakját, azaz azt az n-elemű sorozatot, melynek i-dik eleme az $\mathbb{F}$ egységeleme, a többi pedig az $\mathbb{F}$ nulleleme. Jelölje $k * i$ azt a $t \in \{1, \ldots, n\}$ indexet, amelyre $s_k s_i = s_t$ teljesül. Világos, hogy az $\mathbf{R}^{(s_i)}$ mátrix k-dik sora egyenlő $\underline{e}_{k*i} \in (\mathbb{F})^n$ vektorral, és így $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $k = 1, \ldots, n$ indexre $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_{k*i} = \underline{0}$ teljesül, ahol $\underline{0}$ az $(\mathbb{F})^n$ nullvektorát jelöli. Ezen utóbbi egyenlőség akkor és csak akkor teljesül $(\mathbb{F})^n$-ben minden $k = 1, \ldots, n$ indexre, ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_k s_i = 0$, azaz $s_k(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i) = 0$ teljesül az $\mathbb{F}[S]$*

félcsoportalgebrában minden $k = 1, \ldots, n$ indexre. Ez pedig éppen azzal ekvivalens, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra jobb annullátorának eleme.

17.46. Megoldás *(a 16.2. feladat megoldása) ($\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n \in \mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor van benne az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^{*}$ magjában , ha $\alpha_1 \mathbf{R}^{(s_1)} + \cdots + \alpha_n \mathbf{R}^{(s_n 1)} = \mathbf{0}$. Az előző feladat szerint ez akkor és csak akkor teljhesül, ha $\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n$ benne van $\mathbb{F}[S]$ jobb oldali annullátorában.*

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] Almeida, J., S. Margolis, B. Steinberg, M. Volkov, *Representation Theory of Finite Semigroups*, Transaction of The American Mathematical Society, Vol. 361, No. 3, 2009, 1429 - 1461

[2] Auinger, K. and Szendrei, M.B., *Reesmatrix semigroups and the regular semidirect product.* J. Aust. Math. Soc. 79(2005), no. 1, 39–60.

[3] Babcsányi, I., *Automaták, Nyelvek, Kódok*, BME, Matematika Intézet, Algebra Tanszék, 2007, elektronikus jegyzet, www.math.bme.hu/ babcs/

[4] Babcsányi, I., *Algebrai Automataelmélet*, BME, TTK, Matematika Intézet, 2011, elektronikus jegyzet, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/18.pdf (ISBN: 978-963-279-461-7)

[5] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups I.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961

[6] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups II.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967

[7] Clifford, A.H. and M. Petrich, *Some classes of completely regular semigroups*, J. Algebra, 46(1977), 462-480

[8] Fuchs, L., *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997

[9] Gécseg, F. & I. Peák, *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972

[10] Hamilton, H., *Permutability of congruences on commutative semigroups*, Semigroup Forum, 10(1975), 55-66

[11] Howie, J.M., *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976

[12] Jürgensen, H., Miglioniri, F., Szép, J., *Semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991

[13] Kurosh, A.G., *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952

[14] Lajos, S., *Generalized ideals in semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 22(1961), 217-222

[15] Ljapin, E. S., *Semigroups*, American Mathematical ciety Providence, Rhode Island, 1963

[16] Marcus, A., *Retract extensions of completely simple semigroups by nil semigroups*, Mathematica, Tom. 34(57), No. 1, 1992, 37-41

[17] Márki, L., *On locally regular Rees matrix semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 37 (1975), 95–102.

[18] Megyesi, L., Pollák Gy., *Über die Struktur derHauptidealhalbgruppen. I.* Acta Sci. Math. (Szeged) 29(1968) 261–270

[19] Nagy, A., *The least separative congruence on a weakly commutative semigroup*, Czech. Math. J., 32(1982), 630-632

[20] Nagy, A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001

[21] Nagy, A., *On faithful representations of finite semigroups S of degree $|S|$ over the fields*, International Journal of Algebra, Vol. 7, 2013, no. 3, 115 - 129

[22] Okniński, J., *Semigroup Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[23] Peirce, B., *Linear Associative Algebra*, American Journal of Mathematics, Vol. 4. No. 1(1881), 97-229

[24] Pertich, M., *Introductions to semigroups*, Merrill Books, Columbus, Ohio, (1973)

[25] Petrich, M., *Lectures in Semigroups*, Akademie-Verlag-Berlin, 1977

[26] Petrich, M., *Inverse semigroups*, John Wiley and Sons, 1984

[27] Pollák, Gy., *Construction of bisimple inverse semigroups from right cancellative semigroups*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), no. 2, 421–426.

[28] Pondělíček, B., *On weakly commutative semigroups*, Czech. Math. J., 25(1975), 20-23

[29] Putcha, M. S., *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6(1973), 12-34

[30] Rédei, L., *The theory of finitely generated commutative semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956

[31] Rees, D., *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36(1940), 387-400

[32] Restivo, A & C. Reutenauer, *On the Burnside problem for semigroups*, J. Algebra, 89(1984), 102-104

[33] Rowen, L.H., *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York; London, 1980

[34] Schein, B.M., *Homomorphism and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific Journal of Mathematics, 17(1966), 529-547

[35] Schein, B. M., *Commutative semigroups where congruences form a chain*, Semigroup Forum, 17(1969), 523-527

[36] Steinfeld, O., *On a generalization of completely 0-simple semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 28(1967) 135–145

[37] Szendrei, M.B., *On an extension of semigroups*. Acta Sci. Math. (Szeged) 39(1977), no. 3-4, 367–389.

[38] Szász, F.A., *Radicals of Rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981

[39] Szász, G., *Eine Charakteristik der primidealhalbgruppen*, Publicationes Mathematicae, Tom. 17. Fasc. 1-4(1970), 9-213

[40] Tamura T., *Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain*, Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 369-380

[41] Tamura T., *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 4(1972), 255 - 261